

REPORTE TÉCNICO
**Reconocimiento
de Patrones**

**De la homología simplicial a la
persistencia homológica. Un estado
del arte**

**Raúl Antonio Alonso Baryolo, Edel Bartolo
García Reyes y Javier Lamar León**

RT_073

mayo 2015





CENATAV

Centro de Aplicaciones de
Tecnologías de Avanzada
MINISTERIO DE LA INDUSTRIA BÁSICA

RNPS No. 2142
ISSN 2072-6287
Versión Digital

SERIE AZUL

REPORTE TÉCNICO
**Reconocimiento
de Patrones**

**De la homología simplicial a la
persistencia homológica. Un estado
del arte**

**Raúl Antonio Alonso Baryolo, Edel Bartolo
García Reyes y Javier Lamar León**

RT_073

mayo 2015



Tabla de contenido

1. Introducción	2
2. Topología y aspectos básicos	5
2.1. Invariante	7
3. Complejos simpliciales	8
3.1. Filtraciones	10
4. Elementos de teoría de grupos	11
5. Homología simplicial	16
5.1. Grupos de homología	19
6. Persistencia homológica	20
6.1. Distancia de Bottleneck	24
6.2. Algoritmo incremental	24
7. Persistencia homológica multidimensional	25
7.1. Multifiltraciones	25
7.2. Persistencia en multifiltraciones	26
7.3. Invariante del rango	27
8. Conclusiones	28

Lista de figuras

1. La <i>figura (a)</i> es topológicamente equivalente a la <i>figura (b)</i> , una invariante topológica no podría diferenciarles.	2
2. Agrupamiento de una nube de puntos. A la izquierda la agrupamiento inicial, utilizando hill-climbing. A la derecha agrupamiento luego de la unión de grupos inestables. Tomado de [1].	3
3. Segmentación de una imagen mediante el método descrito en [2].	3
4. Segmentación de una forma mediante el método descrito en [3].	4
5. A la izquierda una esfera. A la derecha una rosca. Tomado de [4].	6
6. El alfabeto inglés particionado por el tipo topológico de cada una de sus letras.	7
7. Espacio topológico de la superficie de una res representado por un complejo simplicial.	9
8. Símplices de dimensiones 0, 1, 2 y 3 de izquierda a derecha.	9
9. Filtración ordenada de un complejo simplicial formado por un triángulo y sus caras. El símplex en rojo es el añadido a cada complejo para obtener el siguiente en la filtración.	11
10. Las aristas resaltadas en amarillo forman una 1-cadena, mientras que los triángulos coloreados en rojos forman una 2-cadena.	16
11. Complejo simplicial K compuesto por vértices, aristas y triángulos. A la izquierda una 1-cadena $Z = \{\{c, d\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{f, c\}\} \in Z_1(K)$. A la derecha una 1-cadena $B = \{\{d, e\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, d\}\} \in B_1(K)$, la cual bordea a la 2-cadena $\{\{d, e, h\}, \{g, e, h\}, \{g, e, f\}\}$	18
12. La cadena muestra que $\partial_3(C_3) = B_2$, $\partial_3(Z_3) = \emptyset$, $\partial_2(C_2) = B_1$, $\partial_2(Z_2) = \emptyset$, $\partial_1(C_1) = B_0$, $\partial_1(Z_1) = \emptyset$. La igualdad $B_3 = \emptyset$ es causa de que no hay 4-símplices, y por tanto ningún 3-símplex es borde de algún 4-símplex. La igualdad $C_0 = Z_0$ se debe a que el borde de todo 0-símplex o vértice es el conjunto vacío, luego toda 0-cadena es un 0-ciclo. Tomado de [4].	19

13. Complejo Simplicial K formado por los 0-símplices $\{a, b, c, d, e, f\}$, los 1-símplices $\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, a\}, \{b, e\}, \{b, f\}, \{c, f\}, \{c, e\}\}$ y los 2-símplices $\{\{b, c, e\}, \{b, c, f\}\}$	19
14. Diagramas de Persistencia Homológica	22
15. Ejemplo de bifiltración de un complejo simplicial. Tomado de [5].	26

De la homología simplicial a la persistencia homológica

Un estado del arte

Raúl Antonio Alonso Baryolo, Edel Bartolo García Reyes y Javier Lamar León

Equipo de Investigaciones de Reconocimiento de Patrones, Centro de Aplicaciones de Tecnologías de Avanzada (CENATAV),
La Habana, Cuba
{rbaryolo, egarcia, jlamar}@cenatav.co.cu

RT.073, Serie Azul, CENATAV
Aceptado: 3 de marzo de 2015

Resumen A pesar de ser considerada una de las ramas más pura de las matemáticas, la topología algebraica ha contado con el avance de nuevas líneas de investigación en las últimas décadas; líneas encaminadas al desarrollo de algoritmos y a la aplicación en diversas ramas de la ingeniería y las ciencias. Sin temer a la alta complejidad de esta rama, la comunidad matemática, motivada por la gran cantidad de contextos donde se requiere manejar información geométrica desde el punto de vista cualitativo, ha logrado importantes avances aplicables a la solución de problemas actuales. Campos donde se reportan aplicaciones son la visión por computadora y el procesamiento de imágenes, la biología molecular, la modelación geométrica, entre otros. Este trabajo tiene como objetivo fundamental brindar una introducción, haciendo énfasis en explicaciones intuitivas, a los resultados alcanzados en las teorías de homología simplicial y persistencia homológica. La selección se debe a que en estas áreas se han obtenido los mayores avances respecto a aplicaciones prácticas. Durante este proceso de introducción y análisis de los resultados alcanzados, se persigue además detectar los principales problemas no resueltos hasta el momento, los cuales quedarán resumidos en las conclusiones del trabajo. La homología simplicial es una herramienta que introduce una vía para asignar un conjunto de grupos abelianos finitamente generados a un espacio topológico, con el objetivo de extraer información cualitativa sobre la conectividad de tal espacio. La persistencia homológica por su parte se formula sobre las bases de la homología simplicial. Esta permite extraer información cualitativa acerca de la variación de la conectividad de un espacio que crece con el avance del tiempo.

Palabras clave: topología, homología simplicial, complejo simplicial, espacio topológico, persistencia homológica.

Abstract. Despite being considered one of the purest branches of mathematics, algebraic topology accounts with new research lines emerged in the last decades. These new lines of research are oriented to the development of algorithms, and the application of topology to many areas of engineering and science. Without any fear to the inner complexity of this branch of mathematics, and motivated by the amount of contexts where is requested qualitative information of geometric objects, the community has got important results applicable to the solution of art state problems of many areas. Computer vision, image processing, molecular biology and geometric modeling are examples of areas where new advances in algebraic topology have been applied. The principal goal of this work is to introduce the results obtained in theories of simplicial homology and persistent homology, emphasizing in intuitive explanations whenever possible. These areas are of special interest because of they show the major advances applied to real problems. In the body of the work, we pursue the unresolved problems so far, which are summarized in the conclusions. The simplicial homology is a tool aimed to assign a set of finitely generated abelian groups to a topological space, with the goal of extracting qualitative information about the connectivity of such space. The Persistent homology, meanwhile, emerges from the basis of simplicial homology, and has as goal to extract qualitative information from the variation of a growing space in time.

Keywords: topology, simplicial homology, simplicial complex, topological space, persistent homology.

1. Introducción

La topología es una de las ramas más jóvenes de las matemáticas. Esta se ocupa de los objetos geométricos atendiendo a la forma, posición, y en general a sus propiedades cualitativas. No tiene en cuenta aspectos relativos a magnitudes ni requiere cálculos con cantidades. Suele verse como la rama de las matemáticas que estudia las propiedades de las figuras geométricas que no se ven alteradas por ninguna clase de transformaciones continuas. Es una especie de geometría donde está permitido doblar, estirar, encoger, retorcer los objetos, pero siempre que se haga sin romper ni separar lo que estaba unido (la transformación debe ser continua), ni pegar lo que estaba separado (la inversa también debe ser continua). Este conjunto de transformaciones, mayor que en el caso de la geometría, permite que se utilice la topología para extraer información cualitativa tal como la cantidad de componentes conexas, cantidad de agujeros, entre otros.

Las propiedades que no varían en un espacio topológico (*invariantes topológicas*) bajo el gran conjunto de transformaciones permisibles por la topología suelen ser muy robustas, debido precisamente a esta cantidad de transformaciones posibles. Por ejemplo, se pueden aplicar todas las transformaciones antes mencionadas a un espacio topológico y su cantidad de componentes conexas y agujeros permanecerán invariantes.

La homología es una *invariante topológica* que asigna grupos a los espacios topológicos (llamados grupos de homología); precisamente estos grupos permiten conocer la cantidad de componentes conexas y *agujeros* en cada dimensión de un espacio topológico. A la homología se le confiere una gran importancia debido a que la eficiencia de los algoritmos desarrollados en esta área permite su aplicación para propósitos prácticos [6]. Contrasta con esto, el hecho de que la mayoría de los algoritmos existentes en la rama de la topología tienen alto costo computacional.

La excesiva robustez de las invariantes topológicas suele invalidarles para aplicaciones prácticas. Por una parte sucede que figuras totalmente diferentes pueden ser equivalentes topológicamente, como es el caso mostrado en la *figura 1*, lo cual da al traste con rasgos muy débiles para representar y comparar espacios topológicos. Por otra parte las invariantes topológicas son muy sensibles respecto al *ruido*, por ejemplo en el caso de la homología si se le añade un pequeño punto a la *figura 1.b*, esta dejaría de ser equivalente a la *figura 1.a* por tener una componente conexa más.

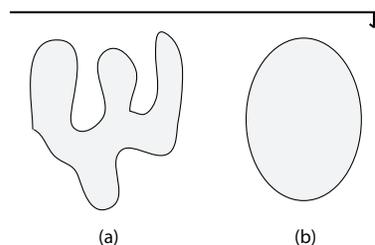


Fig. 1. La *figura (a)* es topológicamente equivalente a la *figura (b)*, una invariante topológica no podría diferenciarles.

Con el objetivo de lidiar con estas debilidades, en particular de la homología, surge la persistencia homológica. Esta, además de capturar características topológicas de un espacio en crecimiento, captura el tiempo de duración de dichas características. Esto permite deshacerse de características de poca duración, las cuales son referenciadas en la literatura como ruido topológico [7]. Si se toma como ejemplo la *figura 1* y se desplaza la línea horizontal hacia abajo como indica la flecha, puede notarse que sobre la línea va quedando el espacio en crecimiento, mientras que por debajo están las partes que aún no se han descubier-

to. Además, durante el desplazamiento de la línea, en la *figura 1.a* aparecen tres componentes que luego se convierten en dos y finalmente en una. Sin embargo, para la *figura 1.b* todo el desplazamiento transcurre con una componente. Por tanto, este mecanismo permite diferenciar a la *figura 1.a* de la *figura 1.b*.

La persistencia homológica ha visto su surgimiento y desarrollo en el transcurso de los últimos 15 años [8], y a pesar de su corta vida ya ha tenido aplicaciones exitosas en varios campos, como a continuación se describe.

Agrupamiento

En el campo del agrupamiento se ha destacado el trabajo [1]. Según los autores, la novedad de su trabajo consiste en la detección y unión de grupos inestables, luego de ser estos calculados por algún método de la literatura. Para ello hacen uso de la persistencia homológica. Además los autores afirman que los avances en la teoría de la persistencia homológica, les han sido útiles para aportar una noción teórica del significado de que un agrupamiento sea bueno. Otra ventaja del método propuesto es que provee retroalimentación visual, la cual puede ser utilizada para corregir los parámetros del método. En la figura 2 se muestra un ejemplo de la aplicación del algoritmo tomado de la fuente [1].

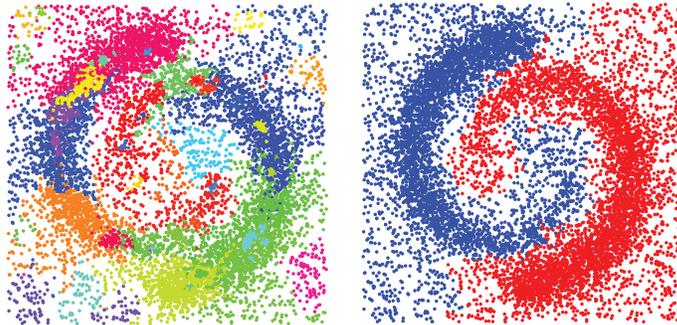


Fig. 2. Agrupamiento de una nube de puntos. A la izquierda la agrupamiento inicial, utilizando hill-climbing. A la derecha agrupamiento luego de la unión de grupos inestables. Tomado de [1].

Segmentación

En el área de la segmentación se reportan dos resultados importantes. Uno de ellos dedica los esfuerzos a la segmentación de imágenes [2]. Para ello utiliza un enfoque que en un primer paso extrae bordes de la imagen. Luego se aplica la persistencia homológica para filtrar y completar los bordes detectados, de modo que la imagen quede separada en regiones por los bordes. Finalmente se unen regiones con persistencias similares para lograr la segmentación final. La *figura 3* muestra un resultado de segmentación de este método.



Fig. 3. Segmentación de una imagen mediante el método descrito en [2].

Un segundo trabajo utiliza la persistencia homológica para segmentar objetos deformables [3]. En este trabajo se utilizan en conjunto la función \mathbf{HKS}^1 y la persistencia homológica, para desarrollar un algoritmo que opera en múltiples escalas para lograr una buena segmentación de objetos tridimensionales. Este trabajo hace uso intensivo de los resultados alcanzados en [1], donde se introduce el agrupamiento en variedades de Riemann haciendo uso de la persistencia homológica. En la *figura 4* se muestra un resultado de segmentación del algoritmo propuesto en [3].



Fig. 4. Segmentación de una forma mediante el método descrito en [3].

Redes de sensores

Se reporta un trabajo que hace uso de la persistencia homológica en el tema de *redes de sensores* [9]. En este trabajo se introduce una técnica novedosa para detectar huecos en el cubrimiento de una red de sensores, para lo cual se hace uso de la persistencia homológica. Un elemento importante de este trabajo es que asume, entre sus preceptos, que no es necesario conocer la ubicación de los nodos de la red en el espacio, es decir que no se necesitan sus coordenadas.

Detección de objetos portados, basada en la forma caminar

Se reporta un trabajo [10], que utiliza la persistencia homológica para detectar cuando una persona lleva consigo un objeto mientras camina. En este trabajo se realiza un modelado y sustracción de fondo para obtener siluetas de una persona en movimiento. Las siluetas obtenidas se utilizan posteriormente para obtener un complejo de celdas, sobre el cual se aplica persistencia homológica para extraer rasgos de alto nivel, los cuales son utilizados para realizar clasificación.

Además de los expuestos se reportan otros trabajos en áreas como la biología molecular [11], la modelación geométrica [12], la identificación de personas por su forma de caminar [13] y análisis de imágenes [14], los cuales hacen uso de la persistencia homológica para sus aportes.

Finalmente se culmina la introducción con un repaso de las secciones por las que está compuesto este trabajo. En la sección 2 se introducen aspectos básicos de Topología General, que persiguen resaltar la importancia de las invariantes topológicas. Luego, en la sección 3 se presenta una representación discreta de espacios topológicos conocida como *complejos simpliciales*, sobre la que se define la homología simplicial. Más adelante, en la sección 4 se introducen algunos elementos de la teoría de grupos, que serán de utilidad para comprender la homología simplicial, la cual se describe en la sección 5 y se examina particularmente con coeficientes en \mathbb{Z}_2 . Finalmente en la sección 6 se introduce la persistencia homológica unidimensional, y en la sección 7 se da una introducción al campo emergente de la persistencia homológica multidimensional.

¹ Heat lernel Signature (\mathbf{HKS}) es un función utilizada en el análisis de objetos deformables.

2. Topología y aspectos básicos

Un concepto de vital importancia en la topología es el de espacio, concepto netamente primitivo, pues se define como un conjunto de puntos. Pero este es un concepto muy débil, mucho más interesante sería dotar a este conjunto de puntos de una noción de conectividad, enriquecerlo con una determinada estructura. De esta idea surge la siguiente noción de topología: *una topología en un espacio es una descripción de cuáles de sus puntos están conectados entre sí*, recuérdese que esta no es la definición formal de topología. Un espacio topológico por su parte sería el espacio junto a una descripción de la conectividad entre sus puntos.

Uno de los primeros ejemplos que la imaginación nos propone, luego de esta definición, es el de un grafo², en el cual el espacio sería el conjunto de sus vértices y la conectividad entre estos estaría dada por sus aristas. Otro buen ejemplo, y más cercano a la definición formal de espacio topológico, es el de los espacios métricos³, que con su noción de distancia permiten definir cuáles puntos son vecinos y cuáles no, quedando descrita así la conectividad en el espacio, estos espacios son muy comunes en la práctica.

La formalización de esta idea nos conduce a la definición de una topología sobre un determinado espacio X , la cual se enuncia como sigue:

Definición 2.1 [15] *Una topología en un espacio X es una colección U de subconjuntos de X que cumple:*

1. $X \in U$ y $\emptyset \in U$.
2. La intersección de los elementos de cualquier subconjunto finito de U es un elemento de U .
3. La unión de los elementos de cualquier subconjunto de U es un elemento de U .

Los subconjuntos de X que pertenecen a U se llaman conjuntos abiertos de la topología U sobre X , mientras que los que no pertenecen a U se llaman conjuntos cerrados de U . La segunda restricción de la definición viene dada precisamente porque la intersección de una cantidad infinita de subconjuntos de U puede no dar como resultado un conjunto abierto de U , detalles y demostración de este hecho pueden encontrarse en [15].

Teniendo definida una topología sobre un espacio X se puede dar entonces la definición de un espacio topológico:

Definición 2.2 [15] *Un espacio topológico sobre un espacio X es el par (X, U) del espacio X junto a una topología U definida sobre X .*

El interés mostrado por los espacios topológicos no es en vano, primeramente estos espacios son la base sobre la cual se sustenta la topología; además son estos de gran interés para las ciencias, ya que surgen comúnmente en la práctica. Es por esto que tanto los científicos de la computación como los de las matemáticas han prestado interés en el desarrollo de herramientas para el cómputo de variadas características sobre tales espacios.

De manera particular se ha prestado especial interés en desarrollar métodos que permitan decidir cuando dos espacios son equivalentes o no topológicamente, independientemente de su realización geométrica. Para cumplir esto los espacios en cuestión tienen que estar primeramente conectados de la misma forma, el siguiente ejemplo da un acercamiento al tema:

Ejemplo 2.1 *Suponga que se tiene una esfera y una rosca, ambas sin relleno, como se muestra en la Figura 5. ¿Tendrán estas figuras (espacios topológicos) la misma conectividad? La respuesta es no. Para*

² Un grafo es un par $G = \langle V, E \rangle$ que consta de un conjunto de vértices V , y un conjunto de pares de vértices E llamados aristas.

³ Un espacio métrico es un espacio con una función asociada para medir distancia entre sus puntos.

mostrarlo basta realizar un corte circular en ambas superficies. En el caso de la esfera no es posible realizar tal corte sin dividirla en dos partes, mientras que en el caso de la rosca sí existen maneras de realizar el corte sin separarla, por ejemplo el corte de la Figura 5. En este caso existe una manera de cambiar la conectividad de la rosca sin separarla en dos componentes, pero no ocurre así en el caso de la esfera.

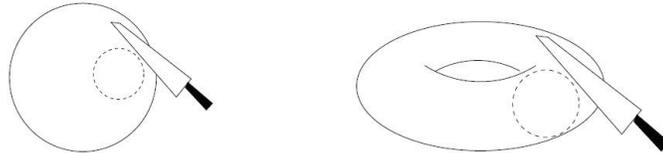


Fig. 5. A la izquierda una esfera. A la derecha una rosca. Tomado de [4].

Luego de comprender este ejemplo es posible asegurar que la rosca y la esfera no son figuras equivalentes topológicamente, pues no tienen la misma conectividad. Este mecanismo constituye una herramienta informal para decidir cuándo determinados espacios, sencillos en realización geométrica, no son equivalentes topológicamente.

Hasta ahora se ha hablado de equivalencia entre espacios topológicos como una noción intuitiva y poco clara, pero existe un concepto que formaliza esta noción y es además de gran importancia en la topología. Antes de pasar a formalizar este concepto vamos a introducir algunas herramientas matemáticas que será de mucha utilidad a partir de este punto.

Definición 2.3 [16] Una **relación** entre dos conjuntos A y B es un subconjunto \wp de $A \times B$. El hecho de que $(a, b) \in \wp$ se lee como “ a está relacionado con b ”, y se denota $a \wp b$.

En lo adelante se hará referencia a una relación entre un conjunto A y él mismo como “una relación en A ”.

Definición 2.4 [16] Una **partición** de un conjunto A es una colección de subconjuntos de A , tal que cada elemento de A pertenece a exactamente uno de los subconjuntos de la colección. A cada subconjunto de la colección se le llama **clase**.

Definición 2.5 [16] Una relación \wp en un conjunto A es una **relación de equivalencia** si para todos $a, b, c \in A$ esta cumple que:

1. (Reflexiva) $a \wp a$.
2. (Simétrica) Si $a \wp b$, entonces $b \wp a$.
3. (Transitiva) Si $a \wp b$ y $b \wp c$, entonces $a \wp c$.

Teorema 2.1 [16] Sea A un conjunto no vacío, y sea \wp una relación de equivalencia en A , entonces \wp produce una partición de A , donde la clase que contiene un elemento $a \in A$ es $[a] = \{x \in A \mid x \wp a\}$. Las clases producidas por \wp se llaman **clases de equivalencia** y si $[a] = [b]$ se dice que a y b son **equivalentes**. Además cualquier partición de A produce una relación de equivalencia \wp en A donde $a \wp b$ si y solo si a y b pertenecen a la misma clase de la partición.

El teorema 2.1 será muy importante en lo que sigue, la demostración puede encontrarse en [16] y no supone mayores complicaciones. En este punto están creadas las condiciones para formalizar la noción

de equivalencia entre espacios topológicos. Cuando un objeto puede ser transformado de forma continua en otro objeto y viceversa, entonces son topológicamente equivalentes y a esta equivalencia se le llama homeomorfismo, y se define formalmente como:

Definición 2.6 [4] Un **homeomorfismo** entre dos espacios topológicos X_1 y X_2 es una función biyectiva $f : X_1 \rightarrow X_2$ que cumple que f y f^{-1} son ambas continuas. Se dice que X_1 es homeomorfo a X_2 si existe un homeomorfismo entre ambos, y en este caso X_1 y X_2 tienen el mismo tipo topológico o son topológicamente equivalente.

Analizando el homeomorfismo como una relación en un conjunto A de espacios topológicos, se puede demostrar que es reflexiva (un espacio topológico es homeomorfo a si mismo), simétrica (si un espacio topológico a es homeomorfo a otro b , entonces b es homeomorfo a a) y transitiva, de modo que es una relación de equivalencia. Por tanto, aplicando el Teorema 2.1, se puede concluir que la relación homeomorfismo sobre un conjunto de espacios topológicos produce una partición de este, de modo que dos espacios topológicos en la misma partición son homeomorfos y en particiones diferentes no lo son. La *Figura 6* muestra el conjunto de espacios topológicos que constituyen las letras del alfabeto inglés particionado de acuerdo a la relación de homeomorfismo.

Clase	Letras del alfabeto inglés
○	P
—	C I J L M N S U V W Z
+	X
⊙	Q
○	D O
⊥	E F G T Y
⊙	A R
⊥	H K
⊖	B

Fig. 6. El alfabeto inglés particionado por el tipo topológico de cada una de sus letras.

El análisis anterior conlleva a la conclusión de que la relación de homeomorfismo constituye una herramienta matemática muy importante que provee un sistema para particionar espacios topológicos equivalentes. Una incógnita muy importante es cómo utilizar esta herramienta computacionalmente, cómo decidir si dos espacios son o no son homeomorfos mediante un algoritmo. Más que una incógnita esta situación constituye una dificultad, pues el matemático ruso Andrei Markov demuestra en 1958 que este es un problema no decidible [17].

Debido a esta dificultad se piensa en nuevas variantes para resolver, al menos parcialmente, el problema de decidir si dos espacios son o no equivalentes topológicamente. Es por esto que surge la definición de *invariante topológica* de un espacio, que se introduce en el apartado 2.1 de la presente sección.

2.1. Invariante

En este apartado se dan dos definiciones de la teoría de invariantes, que servirán de base para comprender la definición de *invariante topológica*, la cual será de especial importancia en lo adelante.

Definición 2.7 Sea A un conjunto no vacío y sea ϱ una relación de equivalencia en A . Una **invariante** con respecto a ϱ es una función $f : A \rightarrow B$ que asigna a todos los elementos de A en una misma clase de equivalencia un único elemento de B (B es un conjunto de elementos cualesquiera).

Debe notar que la definición 2.7 permite que a elementos de A en diferentes clases de equivalencia también se le asigne el mismo elemento de B , lo cual tiende a confundir al lector. Generalmente es de mayor utilidad práctica el contrarrecíproco de esta definición. Si a dos elementos de A se les asigna diferentes elementos de B entonces puede asegurarse que los elementos de A no están en la misma clase de equivalencia. De esta manera, si la invariante es suficientemente buena, es útil como mecanismo discriminativo.

Al prohibir en la definición 2.7 que a elementos de A en diferentes clases de equivalencia se le pueda asignar un mismo elemento de B , surge la importante definición que a continuación se enuncia.

Definición 2.8 Sea $f : A \rightarrow B$ una invariante con respecto a una relación de equivalencia ϱ definida sobre un conjunto A , f es una **invariante completa** si asigna elementos diferentes de B a elementos de A en clases de equivalencia diferentes.

Definición 2.9 [4] Una **invariante topológica** es una función $f : T \rightarrow B$, que va de un conjunto de espacios topológicos T a un conjunto de elementos cualesquiera B , y que asigna a espacios homeomorfos de T un mismo elemento de B .

Puede notarse que la definición 2.9 es un caso particular de la definición 2.7, puesto que en el caso de la definición 2.9 se toma como relación de equivalencia al caso particular de la relación de homeomorfismo entre espacios topológicos.

A partir de este punto el trabajo se centra en exponer toda la teoría que es necesario conocer para comprender la ya mencionada invariante topológica llamada *homología simplicial*. Esta invariante tiene la importante característica de estar definida sobre espacios topológicos representados de manera discreta. Debido a esto, antes de indagar en los aspectos intrínsecos de la invariante, se debe introducir los elementos necesarios para comprender la estructura de la representación discreta de los espacios topológicos. Esta representación se forma básicamente con una muestra finita de puntos del espacio y conexiones entre estos puntos que forman elementos primarios de la geometría (segmentos, polígonos, poliedros, etc.), obteniéndose estructuras similares a la mostrada en la *Figura 7*. En el presente trabajo se expondrá un caso particular de estas representaciones muy utilizado en la práctica y conocido como *complejos simpliciales*.

3. Complejos simpliciales

Una de las principales y más difundidas formas de representar superficies computacionalmente es mediante la unión de vértices, aristas, polígonos, poliedros y homólogos de mayores dimensiones. De esta manera se logra mediante la unión de las fronteras de figuras geométricas simples, representar objetos (espacios topológicos) de diferentes grados de complejidad. Este tipo de representaciones son conocidas con el nombre de complejos simpliciales cuando las figuras usadas son vértices, aristas, triángulos, tetraedros y análogos al triángulo en mayores dimensiones. Los elementos geométricos que conforman a los complejos simpliciales son conocidos como *símplices*. La *Figura 7* muestra un ejemplo de complejo simplicial donde los *símplices* que lo conforman son vértices, aristas y triángulos. A continuación se expone la formalización matemática de estas ideas.

Antes de pasar a la definición formal de complejo simplicial es necesario dar algunas definiciones importantes que sustentan a esta.

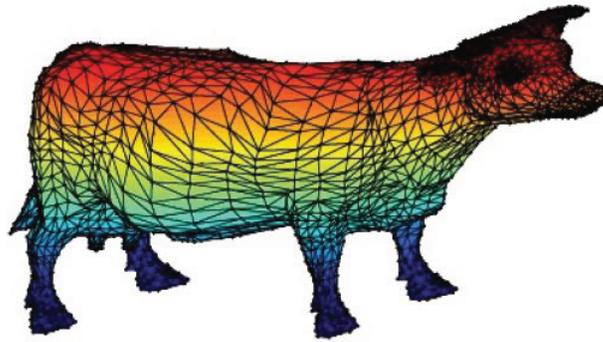


Fig. 7. Espacio topológico de la superficie de una res representado por un complejo simplicial.

Definición 3.1 [18] Sean v_0, \dots, v_k puntos en \mathbb{R}^n , el punto $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i$ con $\lambda_i \in \mathbb{R}$ es una **combinación lineal** de v_0, \dots, v_k , si esta combinación lineal cumple que $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$, entonces toma el nombre de **combinación afín**, la cual si a su vez cumple que $\lambda_i \geq 0$ para $0 \leq i \leq k$ entonces es llamada **combinación convexa**.

Definición 3.2 [18] El conjunto de todas las combinaciones convexas de un conjunto de puntos C se llama **envoltura convexa** de C .

Definición 3.3 [18] Un conjunto de puntos S es **afín (linealmente) independiente** si ninguno de sus puntos puede ser expresado como una combinación afín (lineal) de los demás.

Definición 3.4 [18] Un **k -símplice** σ es la envoltura convexa de un conjunto de $k + 1$ puntos afín independientes $S = \{v_0, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$. Los puntos de S son los **vértices** del símplice, se dice que S define a σ . La **dimensión** de un símplice es la cantidad de vértices menos uno ($\dim \sigma = |S| - 1 = k$).

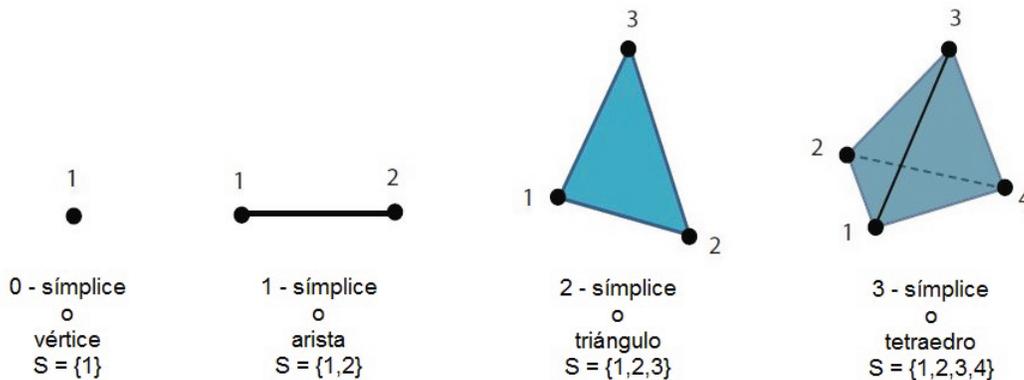


Fig. 8. Símplices de dimensiones 0, 1, 2 y 3 de izquierda a derecha.

En la *Figura 8* se muestran algunos símplices de dimensiones bajas. En el caso del 2-símplice o triángulo, se tiene como conjunto de vértices a $S = \{1,2,3\}$, mientras que la envoltura convexa de este conjunto es toda el área azul, todo punto dentro del área azul pertenece a la envoltura convexa, no siendo así para los puntos fuera de esta área. Los símplices son importantes, pues permiten representar regiones de un espacio solo con sus vértices.

Definición 3.5 [18] Sea σ el k -símplice definido por el conjunto afín independiente $S = \{v_0, \dots, v_k\}$. Un símplice τ definido por $T \subseteq S$ es una **cara** de σ , y además σ es **cocara** de τ . Estas relaciones se denotarán por $\tau \prec \sigma$ y $\sigma \succ \tau$. Puede apreciarse que se cumple que $\sigma \prec \sigma$ y que $\sigma \succ \sigma$.

En la *Figura 8* se tiene que el vértice $\{1\}$ es cara de la arista $\{1, 2\}$, la cual es cara del triángulo $\{1, 2, 3\}$, que a su vez es cara del tetraedro $\{1, 2, 3, 4\}$. De manera inversa se obtiene la relación de cocara.

Finalmente estamos en condiciones de dar la importante definición de complejo simplicial, que se enuncia como sigue:

Definición 3.6 [18] Un **complejo simplicial** es una colección finita de símplices K que cumple que:

1. Si $\sigma \in K$ y $\tau \prec \sigma$ entonces $\tau \in K$.
2. Si $\sigma_0 \in K$ y $\sigma_1 \in K$ entonces $\tau = \sigma_0 \cap \sigma_1$ es vacío o $\tau \prec \sigma_0, \sigma_1$.

La dimensión de K se define como la dimensión del símplice de mayor dimensión en K .

Como se puede notar un complejo simplicial no es más que un conjunto de símplices junto a una descripción de como unir a estos símplices para obtener objetos de mayor complejidad.

Hasta el momento se puede notar que la definición de complejo simplicial es una definición completamente geométrica, ya que estos complejos están compuestos por símplices, que no son más que figuras geométricas simples como antes se dijo. Dado el interés por la topología de los objetos, una clara separación entre la geometría y la topología de estos es deseable, de modo que la extracción de propiedades topológicas quede completamente aislada de la geometría de los objetos. La siguiente definición muestra que es posible lograr esta separación:

Definición 3.7 [7] Un **complejo simplicial abstracto** sobre un conjunto S es una colección finita K de subconjuntos de S llamados símplices abstractos, tal que se cumple que:

1. $\forall v \in S$ se cumple que $\{v\} \in K$. (Los conjunto $\{v\}$ son los vértices de K)
2. Si $\sigma \in K$ y $\tau \subseteq \sigma$ entonces $\tau \in K$. (Se dice que τ es cara de σ y σ es cocara de τ)

Observación 3.1 Nótese que si a cada elemento del conjunto S se le asigna una coordenada de \mathbb{R}^n , de modo que a cada símplice abstracto en K le correspondan coordenadas afínmente independientes, entonces se obtiene un complejo simplicial que se conoce como realización geométrica del complejo simplicial abstracto K . De esta manera se puede tener la geometría por un lado mediante las coordenadas asociadas a los elementos de S , mientras que el complejo K de la definición 3.7 provee la topología del espacio.

Los complejos simpliciales abstractos son de especial interés en el presente trabajo, ya que constituirán la entrada de los algoritmos encargados de desarrollar cálculos topológicos, pero para esto los símplices abstractos que lo conforman deberán cumplir con un cierto orden.

3.1. Filtraciones

Definición 3.8 [4] Un **subcomplejo** de un complejo simplicial K es un complejo simplicial $S \subseteq K$.

Definición 3.9 [4] Una **filtración** de un complejo simplicial K es una secuencia anidada de subcomplejos simpliciales de K , $\emptyset = K^0 \subseteq K^1 \subseteq \dots \subseteq K^m = K$.

Definición 3.10 [6] Una **función filtro** de un complejo simplicial K es una función $F : K \rightarrow R$ que asigna a cada símplice un valor real, tal que el valor de la función en un símplice es mayor o igual que en cualquiera de sus caras.

Definición 3.11 Una **filtración ordenada** de un complejo simplicial K es una filtración $\emptyset = K^0 \subseteq K^1 \subseteq \dots \subseteq K^m = K$ que cumple que $|K^i - K^{i-1}| = 1$ para $1 \leq i \leq m$.

De la definición 3.11 se infiere que de la adición de un determinado símplice a un subcomplejo se obtiene el subcomplejo siguiente en la filtración. En la *figura 9* se muestra una filtración ordenada de un complejo simplicial, además se muestra que cada símplice σ tiene asociado un tiempo $t(\sigma)$ que corresponde con su índice en la filtración (si el símplice σ es añadido a K^{i-1} para obtener K^i entonces $t(\sigma) = i$), esta noción del tiempo de un símplice será de utilidad posteriormente.

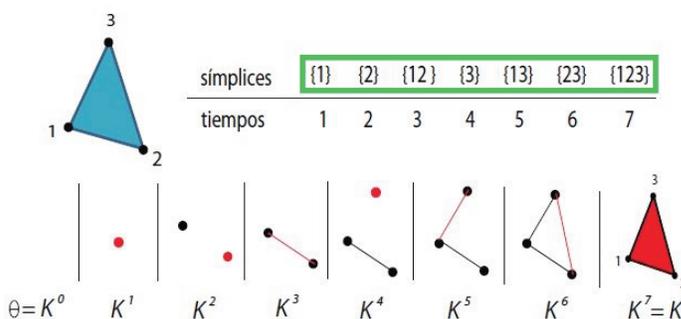


Fig. 9. Filtración ordenada de un complejo simplicial formado por un triángulo y sus caras. El símplice en rojo es el añadido a cada complejo para obtener el siguiente en la filtración.

De acuerdo a la definición, una filtración ordenada de un complejo simplicial K se puede ver como el establecimiento de un orden total en sus símplices, $K_f = [\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_m]$, de modo que todo prefijo de la ordenación $K_f^i = [\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_i]$ sea un subcomplejo del siguiente prefijo $K_f^{i+1} = K_f^i + [\sigma_{i+1}]$. De este modo el tiempo de un símplice no es más que su índice en la ordenación ($t(\sigma) = index(\sigma)$). Debe notarse además que dada una función filtro, queda completamente determinada una filtración ordenada de un complejo simplicial, solo bastaría ordenar los símplices con respecto al valor real que la función les asigna. El rectángulo verde en la *figura 9* muestra un ejemplo de ordenación. De esta manera se puede ir analizando un símplice a la vez y así ir pasando por todos los subcomplejos de la filtración.

Los detalles expuestos hasta este momento avalan al potente mecanismo de representación discreta de espacios topológicos que constituyen los complejos simpliciales. Seguidamente se introducen algunas nociones de *teoría de grupos*, ya que la homología simplicial hace uso intensivo de esta herramienta matemática. Los conocedores de esta rama del álgebra abstracta podrán pasar directamente a la sección 5.

4. Elementos de teoría de grupos

Las invariantes topológicas, como se expresa en la definición 2.9, asocian objetos a los espacios topológicos. Como puede apreciarse, esta definición permite muchas libertades, pues no plantea restricciones acerca de tales objetos. Una rama de la topología, conocida como *topología algebraica*, se ha desarrollado gracias a estas libertades. Los objetos que la topología algebraica asocia a los espacios topológicos son estructuras del álgebra. La homología simplicial es un caso de estudio de especial interés dentro de la topología algebraica, esta asocia grupos a los espacios topológicos, conocidos como *grupos de homología*.

Debido al interés que representa la homología simplicial para este trabajo se debe tener algunas nociones de la teoría de grupos. A causa de esta exigencia se exponen a continuación algunos aspectos esenciales de esta teoría.

Antes de pasar la definición de grupo se debe conocer que una **operación binaria** $*$ en un conjunto G es una regla que asigna a cada par ordenado de elementos de G un elemento también de G . La operación binaria $*$ en G es **asociativa** si para todos $x, y, z \in G$ se cumple que $(x * y) * z = x * (y * z)$, esta operación es además **conmutativa** si se cumple que $x * y = y * x$.

Definición 4.1 [16] Un **grupo** $\langle G, * \rangle$ es un conjunto G , junto con una operación binaria $*$ en G , tal que se satisfacen los siguientes axiomas:

1. La operación binaria $*$ es asociativa.
2. Existe un elemento $e \in G$ tal que $e * x = x * e = x$ para todas las $x \in G$ (e se denomina **elemento identidad** para $*$ en G).
3. Para cada $x \in G$ existe un elemento $x' \in G$ con la propiedad de que $x * x' = x' * x = e$ (x' se llama **inverso** de x respecto a $*$ en G).

Definición 4.2 [16] Un **grupo abeliano** es un grupo $\langle G, * \rangle$ donde la operación $*$ es conmutativa.

Ejemplo 4.1 Ejemplos muy usuales de grupos abelianos son el grupo $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ de los números enteros junto a la operación de suma (donde el elemento identidad es 0 y el inverso de un elemento x es $-x$) y el grupo $\langle \mathbb{R}^*, * \rangle$ de los números reales excepto el cero junto a la operación de multiplicación (donde el elemento identidad es 1 y el inverso de un elemento x es x^{-1}).

Definición 4.3 [16] Sea $\langle G, * \rangle$ un grupo con un número finito de elementos, se conoce como **orden de** $\langle G, * \rangle$ a su cantidad de elementos.

Observación 4.1 El lector debe conocer que todo grupo tiene un único elemento identidad, y que en un grupo cada elemento tiene un único elemento inverso. Estas propiedades son fácilmente deducibles de la definición de grupo, y muy importantes en lo que sigue.

Definición 4.4 [16] Sea $\langle G, * \rangle$ un grupo y $S \subseteq G$, si se cumple que $\langle S, * \rangle$ es un grupo, entonces a $\langle S, * \rangle$ se le llama **subgrupo** de $\langle G, * \rangle$.

Definición 4.5 Sea e el elemento identidad de un grupo $\langle G, * \rangle$, entonces $\langle \{e\}, * \rangle$ es un subgrupo de $\langle G, * \rangle$ y se llama **subgrupo trivial** de $\langle G, * \rangle$.

Ejemplo 4.2 Un ejemplo usual de subgrupo es $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ como subgrupo del grupo $\langle \mathbb{R}, + \rangle$. Puede notarse que todo grupo $\langle G, * \rangle$ tiene como subgrupos a si mismo, y al **subgrupo trivial**.

Luego de haber conocido la definición de subgrupo se puede introducir un importante resultado que muestra la posibilidad de particionar los elementos de un grupo haciendo uso de un subgrupo de este.

Teorema 4.1 [4] Sea $\langle G, * \rangle$ un grupo y $\langle S, * \rangle$ un subgrupo de $\langle G, * \rangle$, entonces se definen las relaciones \sim_L y \sim_R sobre los elementos de G como:

1. $a \sim_L b$ si y solo si $a' * b \in S$, con $a, b \in G$ y a' inverso de a .
2. $a \sim_R b$ si y solo si $a * b' \in S$, con $a, b \in G$ y b' inverso de b .

Estas relaciones cumplen la propiedad de ser relaciones de equivalencia en G .

Demostración. La demostración de este teorema es muy sencilla aplicando la definición de relación de equivalencia. El lector puede comprobar el resultado.

Observación 4.2 *Puede notarse que $a \sim_L b$ implica que $a' * b = s \in S$, de donde se deduce que $b = a * s$. Esta deducción nos lleva a decir que los elementos relacionados mediante \sim_L son los pares de la forma $(a, a * s)$ donde $s \in S$. De la misma manera los elementos relacionados mediante \sim_R son los pares de la forma $(a, s * a)$. Este análisis constituye la motivación para la siguiente definición.*

Definición 4.6 [16] *Sea $\langle S, * \rangle$ un subgrupo de un grupo $\langle G, * \rangle$, y sea $a \in G$. La **clase lateral izquierda** $a * S$ se define como $a * S = \{a * s | s \in S\}$. La **clase lateral derecha** $S * a$ se define como $S * a = \{s * a | s \in S\}$.*

Observación 4.3 *De acuerdo a la definición 4.6 se puede notar que todas las clases laterales tienen la misma cantidad de elementos, cantidad que concuerda con $|S|^4$. Si el grupo $\langle G, * \rangle$ es abeliano las clases laterales izquierdas y derechas coinciden. Además los elementos en $a * S$ ($S * a$) son todos los que se relacionan con a mediante la relación \sim_L (\sim_R), lo cual permite decir que las clases laterales izquierdas (derechas) no son más que los conjuntos de la partición de G producida por \sim_L (\sim_R).*

Teorema 4.2 [16] *Sea $\langle S, * \rangle$ un subgrupo de un grupo $\langle G, * \rangle$, tales que sus clases laterales izquierda y derecha coinciden ($a * S = S * a \forall a \in G$), sean $a, b \in G$, entonces el conjunto de las clases laterales forman un grupo con la operación binaria $(a * S) \circ (b * S) = (a * b)S$. Este grupo se conoce como **grupo cociente de $\langle G, * \rangle$ módulo $\langle S, * \rangle$** y se denota por $\langle G/S, \circ \rangle$, los elementos en una misma clase lateral se dice que son **congruentes módulo S** .*

La coincidencia exigida a las clases laterales es necesaria para asegurar que la operación $(a * S) \circ (b * S) = (a * b)S$ esté bien definida (por bien definida se entiende que dé como resultado a una única clase lateral, independientemente de los elementos $a \in (a * S)$ y $b \in (b * S)$ que se hayan seleccionado). Contando con que esta operación está bien definida la demostración de este resultado no es compleja, en [16] se encuentran los detalles.

Ejemplo 4.3 *Tómese el grupo $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ de los enteros con la suma, y el subgrupo $\langle 3\mathbb{Z}, + \rangle$ de los enteros múltiplos de 3 (congruentes con 0 módulo 3). Como este subgrupo es abeliano las clases laterales coinciden, y no son más que $0 + 3\mathbb{Z}$, $1 + 3\mathbb{Z}$ y $2 + 3\mathbb{Z}$, las cuales representan los subconjuntos de los enteros congruentes 0 modulo 3, 1 modulo 3 y 2 modulo 3 respectivamente. Puede notarse que el conjunto de estas tres clases junto a la operación descrita en el teorema 4.2 forman el grupo cociente de $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ módulo $\langle 3\mathbb{Z}, + \rangle$.*

Definición 4.7 [4] *Sea $\langle G, * \rangle$ un grupo y $S \subseteq G$. Se define el menor subgrupo de $\langle G, * \rangle$ que contiene a S como el **subgrupo de $\langle G, * \rangle$ generado por S** . Si este subgrupo es todo $\langle G, * \rangle$ entonces se dice que S **genera a $\langle G, * \rangle$** . Si existe algún subconjunto finito de G que genere a $\langle G, * \rangle$ entonces se dice que $\langle G, * \rangle$ es **finitamente generado**.*

Observación 4.4 *De la definición puede notarse que todo grupo $\langle G, * \rangle$ con una cantidad finita de elementos es finitamente generado, para ello basta tomar como conjunto generador a todo G . Que un grupo $\langle G, * \rangle$ sea generado por $S \subseteq G$ significa que todos los elementos de G se pueden obtener mediante operaciones con los elementos de S .*

⁴ La notación $|S|$, donde S es un conjunto, se refiere a la cardinalidad de S .

Definición 4.8 [4] Sea $\langle G, * \rangle$ un grupo y $a \in G$. El menor subgrupo de $\langle G, * \rangle$ que contiene a a se llama **subgrupo cíclico de $\langle G, * \rangle$ generado por a** . Si este subgrupo es todo $\langle G, * \rangle$ entonces se dice que **a genera $\langle G, * \rangle$** y que **$\langle G, * \rangle$ es un grupo cíclico con generador a** .

Ejemplo 4.4 Existen grupos cíclicos finitos e infinitos. En el caso infinito el ejemplo clásico es el de los enteros junto a la suma ($\langle \mathbb{Z}, + \rangle$), en este caso el grupo tiene como elemento generador al número 1, y también al -1. En el caso finito los grupos cíclicos más comunes son los grupos $\langle \mathbb{Z}_n, +_n \rangle$ de los enteros no negativos menores que n junto a la suma módulo n , en estos casos el elemento generador es el 1. En lo adelante nos referiremos a $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ como \mathbb{Z} y a $\langle \mathbb{Z}_n, +_n \rangle$ como \mathbb{Z}_n siempre que esto no cree ambigüedad.

Teorema 4.3 [16] Sea $\langle G, * \rangle$ un grupo cíclico con generador $a \in G$, entonces $G = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$, donde a^n significa $a * a * \dots * a$, n veces, a^0 es la identidad de $\langle G, * \rangle$, a^{-1} es el inverso de a y a^{-n} significa $a^{-1} * a^{-1} * \dots * a^{-1}$, n veces.

Teorema 4.4 [16] Todo grupo cíclico es un grupo abeliano.

Definición 4.9 [16] Una función $\varphi : G \longrightarrow G'$ que conecta dos grupos $\langle G, * \rangle$ y $\langle G', *' \rangle$ es un **homomorfismo** si cumple que $\varphi(a * b) = \varphi(a) *' \varphi(b)$ para todos $a, b \in G$. La propiedad exigida a la función anterior se conoce como **propiedad de aditividad**.

Dada la definición de homomorfismo entre grupos, es menester enunciar un teorema que será de mucha utilidad posteriormente.

Teorema 4.5 [16] Sea $\varphi : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo entre los grupos $\langle G, * \rangle$ y $\langle G', *' \rangle$, entonces se cumplen las siguientes proposiciones:

1. Si e es la identidad en $\langle G, * \rangle$ entonces $e' = \varphi(e)$ es la identidad en $\langle G', *' \rangle$
2. Si $a \in G$ entonces $\varphi(a') = \varphi(a)$, a' es el inverso de a en G .
3. Si H es subgrupo de G entonces $\varphi(H)$ es subgrupo de G' .
4. Si K' es un subgrupo de G' entonces $\varphi^{-1}(K')$ es subgrupo de G .

La demostración de este resultado no presenta mayores complicaciones, se pueden encontrar los detalles en [16].

La relación de homomorfismo permite definir un subgrupo de su grupo dominio muy importante, el cual se conoce como *kernel*.

Teorema 4.6 [16] Sea $\varphi : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo entre los grupos $\langle G, * \rangle$ y $\langle G', *' \rangle$. El conjunto de elementos de G cuya imagen bajo φ es el elemento identidad de $\langle G', *' \rangle$ es un subgrupo de $\langle G, * \rangle$ con la operación $*$. Este subgrupo se llama **kernel** de φ .

Demostración. Para demostrar este teorema, basta tomar al subgrupo trivial $\langle \{e'\}, *' \rangle$ de $\langle G', *' \rangle$ y aplicar el último punto del teorema 4.5.

Definición 4.10 [16] Una función $\varphi : G \longrightarrow G'$ que conecta dos grupos $\langle G, * \rangle$ y $\langle G', *' \rangle$ es un **isomorfismo** si cumple que $\varphi(a * b) = \varphi(a) *' \varphi(b)$ para todos $a, b \in G$, y además es una función biyectiva. Si existe un isomorfismo ente dos grupos $\langle G, * \rangle$ y $\langle G', *' \rangle$ se dice que estos grupos son **isomorfos**.

Observación 4.5 *Note que la definición 4.10 es un caso particular de la definición de homomorfismo 4.9, por lo que los resultados aplicables a homomorfismos también son aplicables a isomorfismos. Es importante comprender que la definición 4.10 busca formalizar el hecho de que dos grupos son iguales excepto por el nombre de sus elementos y de sus operaciones, si dos grupos $\langle G, * \rangle$ y $\langle G', *' \rangle$ son isomorfos, entonces cambiando el nombre de cada elemento $x \in G$ por el nombre $\varphi(x)$ se obtiene el elemento equivalente en $\langle G', *' \rangle$, por otro lado la condición $\varphi(a * b) = \varphi(a) *' \varphi(b)$ tiene como objetivo mantener la estructura de la operación, ya que si dos elementos $a, b \in G$ al operarse dan un tercer elemento $c \in G$ ($a * b = c$) entonces al operarse sus cambios de nombres en G' , $\varphi(a) *' \varphi(b)$ daría como resultado, de acuerdo a la condición impuesta, el cambio de nombre de c ($\varphi(a * b) = \varphi(c)$).*

Teorema 4.7 [16] *Sea F un conjunto de grupos no vacío, entonces la relación de isomorfismo entre grupos es una relación de equivalencia en F . Las clases de equivalencia se llaman en este caso **clases de isomorfismo del conjunto F** .*

El resultado que plantea el teorema 4.7 se puede verificar demostrando que: (I) un grupo G es isomorfo a sí mismo, (II) que si un grupo G es isomorfo a otro G' entonces G' es isomorfo a G y que (III) si un grupo G es isomorfo a otro G' y G' es isomorfo a otro G'' entonces G es isomorfo a G'' , como se conoce, estas son las propiedades que debe cumplir una relación para ser de equivalencia. A partir de este resultado se deduce que un conjunto F de grupos puede ser particionado en clases de equivalencia (clases de isomorfismo), donde grupos en una misma clase de isomorfismo son isomorfos y en clases diferentes no lo son.

Teorema 4.8 [16] *Cualquier grupo cíclico infinito $\langle G, * \rangle$ es isomorfo a el grupo cíclico de los enteros bajo la suma, \mathbb{Z} . Cualquier grupo cíclico finito con n elementos es isomorfo al grupo cíclico de los enteros no negativos menores que n con la operación de suma modulo n , \mathbb{Z}_n .*

Este resultado es muy importante, pues desvela que todos los grupos cíclicos infinitos son iguales excepto por el nombre de los elementos y de la operación, y que todos los grupos cíclicos finitos con un misma cantidad de elementos también son iguales excepto por el nombre de los elementos y de la operación.

Teorema 4.9 [16] *Sean $\langle G_1, *_1 \rangle, \langle G_2, *_2 \rangle, \dots, \langle G_m, *_m \rangle$, m grupos. Para (a_1, a_2, \dots, a_m) y (b_1, b_2, \dots, b_m) elementos de $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_m$ definase la operación $(a_1, a_2, \dots, a_m) * (b_1, b_2, \dots, b_m) = (a_1 *_1 b_1, a_2 *_2 b_2, \dots, a_m *_m b_m)$. Entonces $\langle G_1 \times G_2 \times \dots \times G_m, * \rangle$ es un grupo, **el producto directo externo de los grupos G_1, G_2, \dots, G_m** .*

Observación 4.6 *La demostración de este resultado es directa de la definición de grupo y puede encontrarse en [16]. Note que este teorema permite construir nuevos grupos a partir de grupos conocidos. También se pueden generalizar las propiedades de los grupos que forman el producto directo externo. Por ejemplo, el producto directo externo es abeliano si todos los grupos que lo conforman también son abelianos; el producto directo externo es un grupo finito si todos los grupos que lo conforman son finitos, etc.*

Teorema 4.10 [16] (**Teorema fundamental de los grupos abelianos finitamente generados**) *Todo grupo abeliano finitamente generado $\langle G, * \rangle$ es isomorfo a al producto directo externo de grupos cíclicos de la forma:*

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_r}. \quad (1)$$

Donde m_i divide a m_{i+1} . Este producto directo externo es único para cada grupo $\langle G, * \rangle$, esto es, el número de factores \mathbb{Z} es único y es conocido como el **número de betti** de $\langle G, * \rangle$ y se denota $\beta(G)$, mientras que los coeficientes m_i son también únicos y conocidos como **coeficientes de torsión** de $\langle G, * \rangle$.

Observación 4.7 *El resultado del teorema 4.10 es de suma importancia puesto que permite parametrizar las clases de isomorfismo del conjunto de los grupos abelianos finitamente generados, esto es, como todos los grupos en una misma clase de isomorfismo son isomorfos entre si, entonces todos son isomorfos a una misma realización de la ecuación 1, y entonces la clase de isomorfismo queda completamente determinada con el número de betti y los coeficientes de torsión, por otro lado a clases de isomorfismo diferentes corresponden realizaciones diferentes de la ecuación 1 debido al hecho de que grupos en clases diferentes no son isomorfos.*

Teorema 4.11 [16] *Sea $\langle G, * \rangle$ un grupo abeliano finitamente generado, entonces se cumple que todo subgrupo $\langle H, * \rangle$ de $\langle G, * \rangle$ es un grupo abeliano finitamente generado.*

Teorema 4.12 [4] *Sea $\langle G, * \rangle$ un grupo abeliano finitamente generado, y sea $\langle H, * \rangle$ un subgrupo abeliano finitamente generado de $\langle G, * \rangle$. Entonces $\langle G/H, \circ \rangle$ es un grupo abeliano finitamente generado y además $\beta(G/H) = \beta(G) - \beta(H)$.*

Finalmente las definiciones y teoremas introducidos en esta sección, sobre las cuales se pueden indagar en [16], nos permitirán comprender el resultado que establece la *homología simplicial* como invariante topológica.

5. Homología simplicial

La homología simplicial es una invariante topológica definida sobre complejos simpliciales, esta invariante estudia la manera en que un símlice de dimensión k está conectado a símlices de dimensión $k - 1$, y como esta conexión influye en la creación y destrucción de ciclos en las dimensiones k y $k - 1$ del complejo simplicial en cuestión. Para esto la homología simplicial asocia grupos a los complejos simpliciales de la manera que se expondrá a continuación.

Definición 5.1 [19] *Sea K un complejo simplicial de dimensión mayor o igual a d , una d -cadena es un subconjunto del conjunto de los d -símlices en K . Se define la operación de suma de dos d -cadenas a y b como la diferencia simétrica de estas, $a \oplus b = (a \cup b) - (a \cap b)$, operación que posee la característica de ser conmutativa. La figura 10 muestra ejemplos de 1-cadena y 2-cadena.*

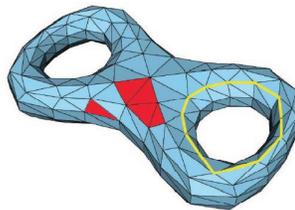


Fig. 10. Las aristas resaltadas en amarillo forman una 1-cadena, mientras que los triángulos coloreados en rojos forman una 2-cadena.

Definición 5.2 [19] *Para un complejo simplicial K , el conjunto de todas las d -cadenas junto a la operación de suma antes descrita forman un grupo abeliano que se denota por $C_d(K)$ y se conoce como el d -ésimo grupo de cadenas de K .*

Puede divisarse que el elemento neutro del grupo $C_d(K)$ es el conjunto vacío, mientras que el inverso de una d -cadena es esta misma, además este grupo es finito y sus elementos concuerdan con los del conjunto potencia del conjunto de todos los d -símplices. Puede notarse además que para un complejo de dimensión d solo existe un grupo de cadena para cada dimensión entre 0 y d , ya que no hay símplices de dimensiones mayores que conformen otros grupos.

Como antes se mencionó, la invariante que se expone estudia la conectividad entre símplices de dimensiones contiguas, para esto se define el *operador borde* de un símplice de la siguiente manera:

Definición 5.3 [19] *Sea K un complejo simplicial y $\sigma \in K$ un d -símplice, el borde $\partial_d(\sigma)$ de σ es el conjunto de todas sus caras de dimensión $d - 1$, conjunto que a su vez, de acuerdo a la definición 5.1, es una $(d - 1)$ -cadena. La función ∂_d se conoce como **operador borde**.*

Observación 5.1 *Con respecto a la definición 5.3, hay que destacar que no hay claridad en cómo se define el operador borde para un 0-símplice o vértice, de acuerdo a la definición el borde sería el conjunto de las (-1) -caras del símplice, pero este conjunto no está bien definido. Con el objetivo de respetar la definición 3.5 se define al conjunto de las (-1) -caras de un vértice como el conjunto vacío. Además se acordará que $\partial_d(\emptyset) = \emptyset$.*

Observación 5.2 *Haciendo uso de la definición 5.3, se puede extender el operador borde a una d -cadena c , para ello basta tomar la suma de los bordes de los d -símplices que la componen, de modo que $\partial_d(c) = \sum_{\sigma \in c} \partial_d(\sigma)$, donde la suma es la expuesta en la definición 5.1. Debe notarse que al aplicarle el operador borde a una d -cadena se obtiene como resultado una $(d - 1)$ -cadena.*

De acuerdo a la observación anterior se llega a la conclusión de que el operador borde ∂_d constituye una función que conecta a los grupos $C_d(K)$ y $C_{d-1}(K)$ para un determinado complejo simplicial K , de modo que $\partial_d : C_d(K) \rightarrow C_{d-1}(K)$. No representa gran dificultad demostrar que esta función cumple con la propiedad de aditividad ($\partial_d(a \oplus b) = \partial_d(a) \oplus \partial_d(b)$ con $a, b \in C_d(K)$). Ostentando la característica de ser una función que posee la propiedad de aditividad, se llega a la conclusión de que el operador borde constituye un homomorfismo entre grupos de cadenas de dimensiones contiguas. De modo que este operador conecta a los grupos de cadena formando el siguiente enlace:

$$\dots \xrightarrow{\partial_4} C_3(K) \xrightarrow{\partial_3} C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} \emptyset. \quad (2)$$

Tener un homomorfismo que conecta a los grupos de cadenas de un complejo simplicial es un paso muy importante. Haciendo uso de este homomorfismo se puede definir subgrupos de un grupo de cadenas que son esenciales para la definición de los *grupos de homología* de un complejo simplicial.

Teorema 5.1 [4] *Dado el homomorfismo $\partial_d : C_d(K) \rightarrow C_{d-1}(K)$, el grupo abeliano $C_d(K)$ definido sobre el complejo simplicial K tiene como subgrupos abelianos a los grupos:*

1. $\ker \partial_d = \langle \{c \in C_d(K) \mid \partial_d(c) = \emptyset\}, \oplus \rangle$, el kernel de ∂_d .
2. $\text{img} \partial_{d+1} = \partial_{d+1}(C_{d+1}(K)) = \langle \{f \in C_d(K) \mid \exists c \in C_{d+1}(K) : f = \partial_{d+1}(c)\}, \oplus \rangle$, la imagen de ∂_{d+1} .

Demostración. La demostración del primero de los puntos se obtiene de manera directa del teorema 4.6, pues es una aplicación de este. Para el segundo punto solo basta recordar que un grupo es siempre subgrupo de sí mismo, de modo que aplicando el tercer punto del teorema 4.5 se obtiene que $\text{img} \partial_{d+1} = \partial_{d+1}(C_{d+1}(K))$ es subgrupo de $C_d(K)$.

Dada la importancia de los subgrupos del teorema 5.1, estos se nombran de una manera muy sugerente. La siguiente definición expone los detalles:

Definición 5.4 [4] Dado el homomorfismo $\partial_d : C_d(K) \longrightarrow C_{d-1}(K)$, para un complejo simplicial K , se define el grupo $Z_d(K) = \ker \partial_d$ como el **d -ésimo grupo cíclico de K** y sus elementos se conocen como **d -ciclos**, igualmente se define el grupo $B_d(K) = \text{img} \partial_{d+1}$ como el **d -ésimo grupo borde de K** y sus elementos se conocen como **d -bordes**.

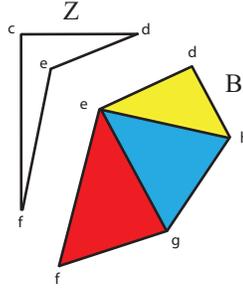


Fig. 11. Complejo simplicial K compuesto por vértices, aristas y triángulos. A la izquierda una 1-cadena $Z = \{\{c, d\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{f, c\}\} \in Z_1(K)$. A la derecha una 1-cadena $B = \{\{d, e\}, \{e, f\}, \{f, g\}, \{g, h\}, \{h, d\}\} \in B_1(K)$, la cual bordea a la 2-cadena $\{\{d, e, h\}, \{g, e, h\}, \{g, e, f\}\}$.

Ejemplo 5.1 Hasta el momento es válido cuestionar los nombres dados a estos grupos, y el por qué decir que son sugerentes. La figura 11 ayudará a comprender estos nombres. La 1-cadena Z , a la izquierda en la figura, es un 1-ciclos en $Z_1(K)$, esto se puede comprobar aplicando el operador borde a Z , con lo que se obtiene $\partial_1(Z) = \emptyset$, puede notarse que las aristas de Z forman un ciclo. Por otra parte la 1-cadena B , a la derecha en la figura, es un 1-borde en $B_1(K)$, esto se puede comprobar ya que al aplicar el operador borde ∂_2 a la 2-cadena $\{\{d, e, h\}, \{g, e, h\}, \{g, e, f\}\}$ se obtiene a B , intuitivamente esto significa que una d -cadena está en $B_d(K)$ cuando bordea a una $(d+1)$ -cadena. Se puede comprobar además que el 1-borde B es también un 1-ciclo, a continuación se verá que un d -borde es siempre un d -ciclo.

Teorema 5.2 Dada una $(d+1)$ -cadena c , se cumple que $\partial_d(\partial_{d+1}(c)) = \emptyset$, lo cual significa que el borde de una $(d+1)$ -cadena es un d -ciclo.

Demostración. Para la demostración se debe detallar la fórmula $\partial_d(\partial_{d+1}(c))$. Debe recordarse que una $(d+1)$ -cadena c no es más que un conjunto de $(d+1)$ -símplices $c = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$.

Antes se definió que $\partial_{d+1}(c) = \sum_{\sigma \in c} \partial_{d+1}(\sigma)$, de donde la fórmula del teorema queda como $\partial_d(\sum_{\sigma \in c} \partial_{d+1}(\sigma))$, pero como el operador borde ∂_d es un homomorfismo esta fórmula puede escribirse como $\sum_{\sigma \in c} \partial_d(\partial_{d+1}(\sigma))$. De este último resultado se obtiene que si se demuestra que $\partial_d(\partial_{d+1}(\sigma)) = \emptyset$, donde σ es un $(d+1)$ -símplice, se demuestra que $\sum_{\sigma \in c} \partial_d(\partial_{d+1}(\sigma)) = \emptyset$, pues esta suma es la expuesta en la definición 5.1.

Para demostrar $\partial_d(\partial_{d+1}(\sigma)) = \emptyset$ basta comprobar que al aplicar el operador borde ∂_{d+1} al $(d+1)$ -símplice σ se obtiene el conjunto de d -símplices que bordean a este. Además al aplicar ∂_d a ese conjunto de d -símplices se obtiene una colección de $(d-1)$ -símplices donde cada uno está repetido dos veces, sumando entonces todos estos $(d-1)$ -símplices de acuerdo a la suma de la definición 5.1 se llega al resultado deseado.

Contando con el resultado de que todo d -borde es un d -ciclo, se llega a la conclusión de que $B_d(K) \subseteq Z_d(K)$, y como $B_d(K)$ es un grupo, se deduce entonces que es subgrupo de $Z_d(K)$. Los elementos de $Z_d(K) - B_d(K)$ son los d -ciclos que no son borde de ninguna $(d+1)$ -cadena. Estos resultados permiten detallar la cadena en 2, de modo que para un complejo simplicial de dimensión 3 quedara como en la figura 12.

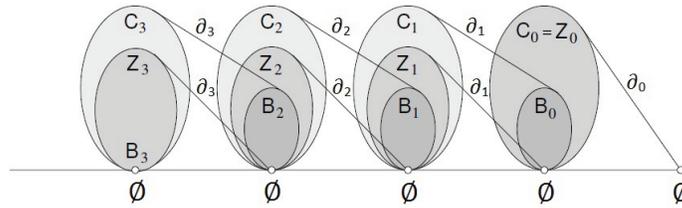


Fig. 12. La cadena muestra que $\partial_3(C_3) = B_2, \partial_3(Z_3) = \emptyset, \partial_2(C_2) = B_1, \partial_2(Z_2) = \emptyset, \partial_1(C_1) = B_0, \partial_1(Z_1) = \emptyset$. La igualdad $B_3 = \emptyset$ es causa de que no hay 4-simplices, y por tanto ningún 3-símplice es borde de algún 4-símplice. La igualdad $C_0 = Z_0$ se debe a que el borde de todo 0-símplice o vértice es el conjunto vacío, luego toda 0-cadena es un 0-ciclo. Tomado de [4].

Finalmente están creadas todas las condiciones para definir los *grupos de homología* de un complejo simplicial K , para esto juegan un papel crucial los grupos $B_d(K)$ y $Z_d(K)$.

5.1. Grupos de homología

Los grupos de homología, al igual que los grupos definidos hasta ahora, son grupos definidos para cada dimensión de un complejo simplicial. Lo que hace a estos grupos especialmente atractivos es que ellos capturan características muy discriminantes de los espacios topológicos.

El interés con el que se definen los grupos de homología es capturar los ciclos no bordes de un complejo simplicial, y además clasificar a estos mediante clases de equivalencia, de modo que ciclos en una misma clase se diferencien solo en un borde. La motivación para la definición de estos grupos se expone con la ayuda de la *figura 13*.

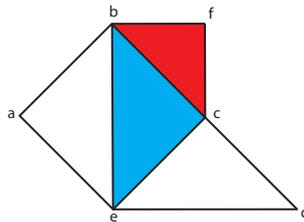


Fig. 13. Complejo Simplicial K formado por los 0-simplices $\{a, b, c, d, e, f\}$, los 1-simplices $\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, a\}, \{b, e\}, \{b, f\}, \{c, f\}, \{c, e\}\}$ y los 2-simplices $\{\{b, c, e\}, \{b, c, f\}\}$.

Examinando la *figura 13* se puede notar que esta contiene dos 1-ciclos no bordes de ninguna 2-cadena, uno es $A = \{\{a, b\}, \{b, e\}, \{e, a\}\}$ y el otro $B = \{\{c, d\}, \{d, e\}, \{e, c\}\}$. Vale cuestionar que ocurre con otros 1-ciclos como $C = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, e\}, \{e, a\}\}$. Al igual que A y B , se cumple que $C \in Z_1(K) - B_1(K)$, pues C no es totalmente borde de una 2-cadena y por tanto $C \notin B_1(K)$. El detalle que hace a C importante, es que $C = A \oplus \partial_2(\{b, c, e\})$ y $A = C \oplus \partial_2(\{b, c, e\})$, es decir la diferencia de C con A es un 1-borde.

En lo adelante todo par de ciclo que se diferencien en un borde al igual que ocurre con A y C serán de interés y se dirán homólogos, ya que representan a un mismo ciclo no borde. Otro ejemplo de 1-ciclos homólogos son A y $D = \{\{a, b\}, \{b, f\}, \{f, c\}, \{c, e\}, \{e, a\}\}$ puesto que $D = A \oplus \partial_2(\{\{b, c, e\}, \{b, c, f\}\})$ y $A = D \oplus \partial_2(\{\{b, c, e\}, \{b, c, f\}\})$. El análisis realizado nos ayuda a comprender que todos los 1-ciclos homólogos a A en K se pueden obtener mediante la operación $A \oplus B_1(K)$, que no es más que una clase lateral izquierda (Definición 4.6) producida por $B_1(K)$ como subgrupo de $Z_1(K)$. Una extensión de este resultado nos permite decir que todos los d -ciclos homólogos a un d -ciclo $X \in Z_d(K)$ son los d -ciclos en el conjunto $X \oplus B_d(K)$, al cual llamaremos *clase de homología*.

Teniendo en cuenta el análisis hasta aquí realizado y haciendo uso del teorema 4.2, gracias a la propiedad de los grupos $Z_d(K)$ y $B_d(K)$ de ser abelianos, se puede definir los grupos de homología de un complejo simplicial.

Definición 5.5 [6] Sea K un complejo simplicial y $Z_d(K)$ y $B_d(K)$ los grupos de d -ciclos y de d -bordes de K , respectivamente. Se define el grupo $H_d(K) = \langle Z_d(K)/B_d(K), \circ \rangle$ de todas las clases laterales producidas por $B_d(K)$ como subgrupo de $Z_d(K)$ como el **d -ésimo grupo de homología de K** , sus elementos (clases laterales) se llamará **clases de homología**. Dos d -ciclos en una misma clase de homología de $H_d(K)$ se dice que son **homólogos**.

Con esta definición se culmina la explicación de la homología simplicial como invariante topológica. Se ha llegado al resultado de que esta invariante asocia como objetos a los espacios topológicos, representados mediante complejos simpliciales, un conjunto de grupos llamados grupos de homología, los cuales tienen como finalidad clasificar a los ciclos del espacio topológico en cuestión. Los más sutiles podrían cuestionar en este punto si la homología es una invariante topológica, si se cumple que a espacios topológicos homeomorfos (Def. 2.6) se asignan los mismos grupos de homología, y la respuesta es que si lo es, aunque la demostración de esto supone algunas complicaciones y la introducción de otras teorías.

Obsérvese que la definición de complejo simplicial establece que estos son conjuntos finitos de simplices, por tanto el grupo abeliano C_d es finitamente generado, pues este se obtiene a partir de los simplices de dimensión d del complejo, los cuales forman el conjunto generador de C_d . Por otro lado los grupos abelianos Z_d y B_d al ser subgrupos de C_d y aplicando el teorema 4.11 se deduce que son finitamente generados. Debido a que B_d es subgrupo de Z_d y ambos son abelianos y finitamente generados, se puede aplicar el teorema 4.12 para llegar a la conclusión de que H_d es un grupo abeliano finitamente generado, lo cual es suficiente para enunciar la siguiente definición.

Definición 5.6 Sea $H_d(K)$ el d -ésimo grupo de homología de un complejo simplicial K . Se define entonces el **d -ésimo número de betti de K** como $\beta_d(K) = \beta(H_d(K))$.

En el caso de las tres primeras dimensiones existe interpretación intuitiva de los números de betti, ya que β_0 concuerda con el número de **componentes conexas** del complejo simplicial, β_1 con el número de **agujeros** (en la *figura 13* los dos espacios no rellenos de azul) y β_2 con el número de **cavidades**. Puede comprobarse manualmente que para el complejo simplicial de la *figura 13* estos números son $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$ y $\beta_2 = 0$.

Comprendido como la homología simplicial asocia grupos a los espacios topológicos representados mediante complejos simpliciales se culminará este recorrido por la topología algebraica con la introducción a importantes y novedosos resultados desarrollados sobre los cimientos de los grupos de homología.

6. Persistencia homológica

La persistencia homológica estudia la forma en que varía la homología en una filtración $\emptyset = K^0 \subseteq K^1 \subseteq \dots \subseteq K^i \subseteq \dots \subseteq K^j \subseteq \dots \subseteq K^m = K$ (Sección 3.1) de un complejo simplicial K . Mediante esta se pueden responder preguntas como: ¿Cuántas y cuales clases de homología aparecen en K^j que no estaban en K^{j-1} ?, ¿De las clases de homología en K^j cuántas y cuáles de ellas están en K^i ?, ¿Cuándo desapareció una clase de homología que existía en K^i y no existe en K^j ?

Como ya se conoce la homología simplicial captura los ciclos no bordes de un complejo simplicial, y los clasifica mediante las clases de homología, de modo que todos los ciclos en una de estas clases se diferencian sólo en un borde.

La persistencia homológica aplicada a una filtración ordenada $\emptyset = K^0 \subseteq K^1 \subseteq \dots \subseteq K^m = K$ de un complejo simplicial K se encarga de llevar cuenta del tiempo i en el que *nace* (surge) una clase de homología a causa de la adición de un símplice σ_i a K^{i-1} para obtener a K^i , y del tiempo j en el que *muere* (desaparece) la misma clase de homología a causa de la adición de un símplice σ_j a K^{j-1} para obtener a K^j . En este caso se dice que la clase de homología tiene un tiempo de duración de $j - i - 1$, ya que persiste desde el subcomplejo K^i hasta el subcomplejo K^{j-1} , además se le asocia el intervalo de persistencia $[i = t(\sigma_i), j = t(\sigma_j))$. En caso de que una clase de homología nacida en algún momento x no muera se dice que tiene tiempo de duración ∞ y su intervalo de persistencia es $[x, \infty)$.

Las ideas anteriores constituyen una explicación para la definición formal de persistencia homológica que se expone a continuación.

Definición 6.1 [4] Sea $\emptyset = K^0 \subseteq K^1 \subseteq \dots \subseteq K^m = K$ una filtración ordenada de un complejo simplicial K , sea z un d -ciclo no borde creado en el tiempo i por la adición del d -símplice σ_i y sea z' un d -ciclo homólogo a z , el cual es convertido en un d -borde en el tiempo j a causa de la adición de un $(d + 1)$ -símplice σ_j . La **persistencia** de z y de la clase de homología Z a la que z pertenece es $j - i - 1$. El d -símplice σ_i se dice **creador** y el $(d + 1)$ -símplice σ_j se dice **destructor** de la clase de homología Z . Si una clase de homología no tiene destructor su persistencia es ∞ .

Observación 6.1 La principal premisa de la persistencia homológica es que características topológicas significativas tienen asociadas largas persistencia, mientras que características con cortas persistencias pueden interpretarse como ruido topológico o rasgos topológicos de poca importancia no identificativos del espacio topológico que se analiza.

A continuación se presentará un ejemplo con el cual se comprenderán algunos detalles intrínsecos de la persistencia homológica. Para ello se hará utilización de la filtración ordenada de la figura 9.

Ejemplo 6.1 En la figura 9 puede notarse que en el primer tiempo se obtiene K^1 al agregar el vértice $\sigma_1 = \{1\}$, creándose así una componente conexa que representa a una clase de homología en $H_0(K^1)$. En tiempo dos se agrega el vértice $\sigma_2 = \{2\}$, surgiendo otra componente conexa que representa a otra clase de homología en $H_0(K^2)$. En el tercer tiempo es agregada una arista $\sigma_3 = \{1, 2\}$, la cual destruye una componente conexa de las dos existentes y por ende una clase de homología (**en estos casos se toma como convenio destruir siempre la última clase de homología creada**), de modo que se forman el par creador-destructor (σ_2, σ_3) entre el vértice $\{2\}$ y la arista $\{1, 2\}$, y el intervalo de persistencia $[t(\sigma_2) = 2, t(\sigma_3) = 3)$ asociado a la clase de homología destruida. Seguidamente en el cuarto tiempo surge una nueva componente conexa a partir del vértice $\sigma_4 = \{3\}$ que es destruida en el siguiente tiempo por la arista $\sigma_5 = \{1, 3\}$ formando el par (σ_4, σ_5) y el intervalo $[4, 5)$. Para el tiempo seis la arista $\sigma_6 = \{2, 3\}$ crea un agujero que representa a una clase de homología en $H_1(K_6)$, la cual es destruida en el séptimo tiempo por el triángulo $\sigma_7 = \{1, 2, 3\}$, formándose el par (σ_6, σ_7) y el intervalo $[6, 7)$. Debe notarse que la componente conexa creada en el primer tiempo nunca fue destruida, por lo que además de los intervalos descubiertos debe también tenerse en cuenta al intervalo $[1, \infty)$.

El intervalo de persistencia $[t(\sigma_x), t(\sigma_y))$ asociado a una clase de homología significa que la clase surge en el complejo K^x de la filtración, creada por la adición de σ_x a K^{x-1} , y muere en el complejo K^y , destruida por la adición del símplice σ_y a K^{y-1} . Estos intervalos introducidos de manera intuitiva permiten representar la persistencia homológica de un complejo simplicial, obteniéndose diagramas como los de la figura 14, los cuales corresponden al ejemplo 6.1.

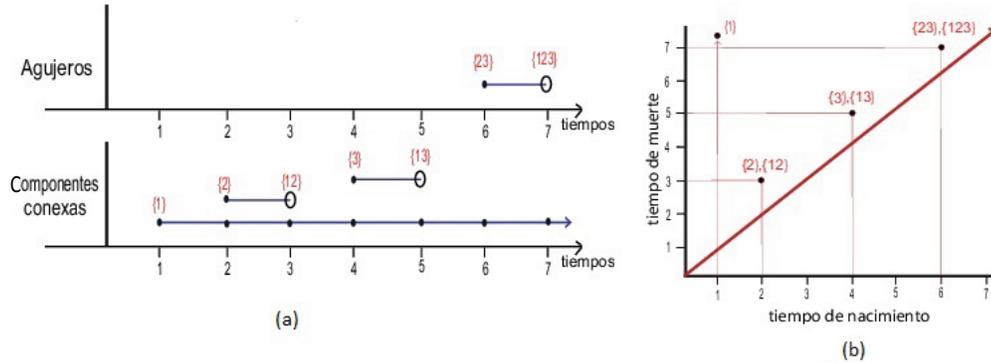


Fig. 14. Diagramas para representar la persistencia homológica de la filtración de la figura 9. En (a) se representan los diagramas conocidos como códigos de barra, uno para cada dimensión. En (b) se representa el llamado diagrama de persistencia.

Hasta el momento se ha dado un tratamiento completamente intuitivo de la persistencia homológica. A continuación se exponen algunos detalles formales publicados en [20] que muestran, a partir del descubrimiento de la estructura algebraica que describe a la persistencia de un complejo simplicial, el poder de esta como invariante completa (2.7, 2.8).

Definición 6.2 Sea B un conjunto y A un subconjunto de B , un **mapa de inclusión** es una función $i : A \rightarrow B$ que asigna a cada elemento $x \in A$ el propio x tratado como elemento de B ($i(x) = x$).

Esta definición tiene aplicación directa en una filtración $K^0 \subseteq K^1 \subseteq K^2 \subseteq \dots \subseteq K^m = K$ de un complejo simplicial K , pues se cumple que $K^x \subseteq K^y$ siempre que $x \leq y$, y por tanto se puede definir el mapa de inclusión entre K^x y K^y para cualesquiera x, y que cumplan $x \leq y$. Note que esto permite expresar la secuencia anidada de subcomplejos simpliciales $K^0 \subseteq K^1 \subseteq K^2 \subseteq \dots \subseteq K^m = K$ como una secuencia conectada mediante el mapa de inclusión: $K^0 \xrightarrow{i} K^1 \xrightarrow{i} K^2 \xrightarrow{i} \dots \xrightarrow{i} K^m = K$.

Teorema 6.1 Sean $x \leq y \leq z$ y por tanto $K^x \subseteq K^y \subseteq K^z$, entonces los mapas de inclusión $i_{xy} : K^x \rightarrow K^y$, $i_{yz} : K^y \rightarrow K^z$ y $i_{xz} : K^x \rightarrow K^z$ cumplen que $i_{xz} = i_{yz} \circ i_{xy}$, o en otras palabras i_{xz} es igual a la composición de funciones entre i_{yz} y i_{xy} .

Aunque se da el resultado para el caso de complejos simpliciales, este se cumple para cualesquiera sean tres conjuntos $A \subseteq B \subseteq C$. La demostración resulta directa de la definición de mapa de inclusión y de la definición de composición de funciones.

El mapa de inclusión $K^x \xrightarrow{i} K^y$ que asigna a cada elemento de K^x el mismo elemento en K^y induce un importante homomorfismo que tiene como dominio al grupo de homología $H_d(K^x)$ y como imagen al grupo de homología $H_d(K^y)$.

Definición 6.3 Sean $x \leq y$ y sean K^x y K^y subcomplejos de una filtración que se sabe cumplen que $K^x \subseteq K^y$. Entonces el mapa de inclusión $K^x \xrightarrow{i} K^y$ induce un **homomorfismo de inclusión** entre $H_d(K^x)$ y $H_d(K^y)$ que se denota por $f_d^{x,y} : H_d(K^x) \rightarrow H_d(K^y)$, para una determinada dimensión d . Este homomorfismo asigna a cada clase de homología $Z_x \in H_d(K^x)$ la clase de homología $Z_y \in H_d(K^y)$ que contiene a Z_x ($f_p^{x,y}(Z_x) = Z_y$).

Es importante destacar que el resultado del teorema 6.1 se extiende para la definición de $f_d^{x,y}$, esto es $f_d^{x,z} = f_d^{y,z} \circ f_d^{x,y}$ para $x \leq y \leq z$.

Definición 6.4 [18] Se llama **d-ésimo grupo de homología (i, j)-persistente** de una filtración $K^0 \subseteq K^1 \subseteq \dots \subseteq K^i \subseteq \dots \subseteq K^j \subseteq \dots \subseteq K^m = K$ de un complejo simplicial K , al grupo que se denota por $H_d^{(i,j)}$ y que se define como $H_d^{(i,j)} = \text{img} f_d^{i,j}$ (recordar que el tercer punto de la definición 4.5 implica que $\text{img} f_d^{i,j}$ es un grupo). Por su parte el **d-ésimo número (i, j)-persistente de betti** es el número $\beta_d^{(i,j)} = \beta(H_d^{(i,j)})$.

Definición 6.5 [20] Sea $F : K^0 \subseteq K^1 \subseteq \dots \subseteq K^m = K$ una filtración de un complejo simplicial K . Se llama **d-ésimo módulo de persistencia asociado a F** a la familia $\{H_d(K^i)\}_{1 \leq i \leq m}$ de los grupos de homología asociados a cada subcomplejo de la filtración F , junto a los homomorfismos $f_d^{i,j} : H_d(K^i) \rightarrow H_d(K^j)$, para todo $i \leq j$.

Esta definición es muy importante, pues introduce el d-ésimo módulo de persistencia, que no es más que la estructura algebraica que describe la persistencia de una filtración de un complejo simplicial; al hablar de persistencia homológica respecto a una filtración de un complejo simplicial la entidad de donde parten los análisis teóricos es la estructura introducida en la definición.

Definición 6.6 Sean $F : K^0 \subseteq K^1 \subseteq \dots \subseteq K^m = K$ y $G : Q^0 \subseteq Q^1 \subseteq \dots \subseteq Q^m = Q$ filtraciones de los complejos simpliciales K y Q respectivamente, y sean $M_d^F : (\{H_d(K^i)\}_{1 \leq i \leq m}, f_d^{i_1, i_2})$ y $M_d^G : (\{H_d(Q^j)\}_{1 \leq j \leq m}, g_d^{j_1, j_2})$ los d-ésimos módulos de persistencia asociados a F y a G respectivamente. Se dice que M_d^F y M_d^G son **módulos de persistencia isomorfos** si se cumple que $H_d(K^x)$ y $H_d(Q^x)$ son isomorfos con isomorfismo $I_d^x : H_d(K^x) \rightarrow H_d(Q^x)$ para todo $1 \leq x \leq m$, y además se cumple para $f_d^{x,y} : H_d(K^x) \rightarrow H_d(K^y)$ y $g_d^{x,y} : H_d(Q^x) \rightarrow H_d(Q^y)$ que si $f_d^{x,y}(h_x) = h_y$ entonces $g_d^{x,y}(I_d^x(h_x)) = I_d^y(h_y)$.

Al igual que la relación de isomorfismo entre grupos, la relación de isomorfismo entre módulos de persistencia es una relación de equivalencia. Para demostrar este hecho hay que demostrar las tres propiedades que definen a la relación de equivalencia y para esto se debe hacer uso de la relación de isomorfismo entre grupos, así como en la definición de composición de funciones, la demostración no se desarrolla pues implica una gran cantidad de cálculos, a pesar de no presentar mayores complicaciones. Al contar la propiedad de que la relación de isomorfismo entre módulos de persistencia es una relación de equivalencia, se puede utilizar el teorema 2.1 para particionar cualquier conjunto de módulos de persistencia de modo que módulos de persistencia en una misma clase son isomorfos y en clases diferentes no lo son.

La siguiente definición formaliza la noción de intervalo de persistencia que se había utilizado hasta el momento para las explicaciones intuitivas.

Definición 6.7 [20] Un **intervalo de persistencia** es un par ordenado $(i, j) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \cup +\infty)$.

Según lo visto hasta este momento, a cada filtración de un complejo simplicial, o lo que es equivalente, a cada módulo de persistencia, se la asocia un conjunto de intervalos de persistencia por cada dimensión d del complejo simplicial en cuestión.

Teorema 6.2 [20] Sea P_d el conjunto de todos los d-ésimos módulos de persistencia, donde como sabemos está definida la relación de equivalencia “isomorfismo”, sea además \mathcal{I} el conjunto que contiene a los conjuntos de intervalos de persistencia. Entonces existe una invariante completa $f : P_d \rightarrow \mathcal{I}$ que asigna a módulos de persistencia de P_d en una misma clase de equivalencia el mismo conjunto de intervalos de persistencia, y a módulos de persistencia en clases diferentes diferentes conjuntos de intervalos de persistencia.

La demostración propuesta en [20] de este asombroso e importante resultado va más allá de la existencia de tal función $f : P_d \rightarrow \wp$, pues también queda demostrada la unicidad de tal función y queda demostrado que el conjunto de intervalos de persistencia asociado a cada módulo de persistencia en P_d coincide con los intervalos introducidos en la definición 6.1. Esto implica que mediante el procedimiento descrito en el ejemplo 6.1 se le asigna a todos los módulos de persistencia en una misma clase de equivalencia el mismo conjunto de intervalos de persistencia y a módulos de persistencia en clases de equivalencia diferentes se les asignan diferentes conjuntos de intervalos. Se concluye entonces que cada conjunto de intervalos de persistencia identifica a una única clase de equivalencia.

6.1. Distancia de Bottleneck

De acuerdo a la *figura 14(b)* un conjunto de intervalos de persistencia se puede interpretar como un conjunto de puntos de \mathbb{R}^2 . Este hecho es suficiente para definir una distancia entre conjuntos de intervalos de persistencia, que a su vez fungiría como una distancia entre módulos de persistencia, donde dos a módulos de persistencia en una misma clase de equivalencia les correspondería distancia cero por tener el mismo conjunto de intervalos de persistencia y a módulos en clases distintas les correspondería distancia distinta de cero. Dada la importancia que resulta tener definida una distancia entre módulos de persistencia, este tema no tardó en ser estudiado, y se utilizó la **distancia de bottleneck** por presentar buenas cualidades para medir distancia entre módulos de persistencia.

Definición 6.8 [21] Sean \wp_1 y \wp_2 dos conjuntos de intervalos de persistencia entonces se denota la **distancia de bottleneck** entre \wp_1 y \wp_2 como d_B y se define como:

$$d_B(\wp_1, \wp_2) = \inf_{\ell} \sup_{x \in \wp_1} \|x - \ell(x)\|_{\infty}, \quad (3)$$

donde $\ell : \wp_1 \rightarrow \wp_2$ pertenece al conjunto de las funciones inyectivas entre \wp_1 y \wp_2 .

Observación 6.2 Una propiedad muy importante que posee la distancia de bottleneck es su estabilidad ante perturbaciones de los datos [18], esto significa que pequeños cambios en la filtración a la que se aplica la persistencia reflejan muy pequeña distancia entre los diagramas de persistencia correspondientes a las filtraciones antes y después de los cambios. Una discusión de este tema puede encontrarse en [21,18].

6.2. Algoritmo incremental

Como ya se conoce, una filtración ordenada (Definición 3.11) de un complejo simplicial, establece un orden en los símlices de este. Esto permite analizar las filtraciones ordenadas de manera creciente de acuerdo al orden que estas establecen, el ejemplo 6.1 constituye una aplicación de esta idea, la cual ha sido ampliamente utilizada en algoritmos para el cálculo de la persistencia homológica.

A continuación se presenta un clásico algoritmo propuesto en [22] para el cálculo de los números de betti de un complejo simplicial dada en forma de filtración ordenada.

Como se puede observar, el algoritmo 1 analiza un símplex σ cada vez y pregunta por la pertenencia de σ a un ciclo, en caso afirmativo estaría creando una clase de homología, mientras que de lo contrario estaría destruyendo. Esta pregunta, conocida como detección de un ciclo, es la mayor dificultad de este algoritmo, y es centro de atención con el objetivo de mejorar en eficiencia. Las respuestas dadas a esta pregunta hasta el momento implican para el caso general una complejidad computacional mayor a $O(n^2)$

Algoritmo 1: Algoritmo incremental

entrada: Filtración ordenada $K_f = [\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m]$ de un complejo simplicial K .

```

1  $n := \dim(K)$ ;
2 for  $d = 0$  to  $n$  do
3   |  $\beta_d := 0$ ;
4 end
5 for  $i = 0$  to  $m$  do
6   |  $d := \dim(\sigma_i)$ ;
7   | if  $\sigma_i$  pertenece a un  $d$ -ciclo de  $K_i$  then
8     |  $\beta_d := \beta_d + 1$ ;
9   | else
10  |  $\beta_{d-1} := \beta_{d-1} - 1$ ;
11  | end
12 end
salida : Lista de números de betti  $\{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n\}$ .

```

del algoritmo [23]. Casos muy particulares de complejos simpliciales han permitido una respuesta de complejidad computacional de $O(n)$ [22]. Un análisis de la correctitud de este algoritmo puede encontrarse en [22].

7. Persistencia homológica multidimensional

En el año 2006 los autores de [24] introducen la persistencia homológica multidimensional, que no es más que una generalización de la persistencia homológica vista hasta ahora. Mientras la persistencia homológica produce una invariante para una filtración de un complejo simplicial, la persistencia multidimensional está destinada a producir una invariante para una *multifiltración* de un complejo simplicial (en la figura 15 se muestra una bifiltración del complejo simplicial de la casilla (3, 2)).

A pesar de las cualidades potenciales de la persistencia multidimensional, y en contraste con la persistencia homológica, la comunidad de la topología computacional se ha mostrado lenta en aplicar esta herramienta para resolver problemas reales. El autor en [25] argumenta que esto no es totalmente sorprendente, dado que con el poder y la generalidad de la persistencia multidimensional viene aparejado un alto grado de complejidad matemática sin precedente en la persistencia homológica que dificulta la aplicación de esta herramienta.

7.1. Multifiltraciones

Esta sección presenta una generalización de los elementos referentes a filtraciones de complejos simpliciales expuestos en la sección 3.1.

A partir de este momento se verá a R^n como un conjunto parcialmente ordenado, donde $(a_1, a_2, \dots, a_n) \lesssim (b_1, b_2, \dots, b_n)$ si y solo si $a_i \leq b_i$ para toda $1 \leq i \leq n$.

Definición 7.1 Una *función multifiltro* de un complejo simplicial K es una función $F : K \rightarrow R^n$ que asigna a cada símplice un vector real, tal que si $\sigma \in K$ y τ es cara de σ entonces $F(\tau) \lesssim F(\sigma)$.

Ejemplo 7.1 La figura 15 representa una función multifiltro F , donde la arista $\{c, e\}$ tiene por valor a $F(\{c, e\}) = (0, 1)$.

Definición 7.2 [26,5] Una multifiltración de un complejo simplicial K es una familia finita $\{K^{\vec{\alpha}}\}_{\vec{\alpha} \in R^n}$ de subcomplejos de K que cumplen que $K^{\vec{\alpha}}$ es subcomplejo de $K^{\vec{\beta}}$ siempre que $\vec{\alpha} \lesssim \vec{\beta}$.

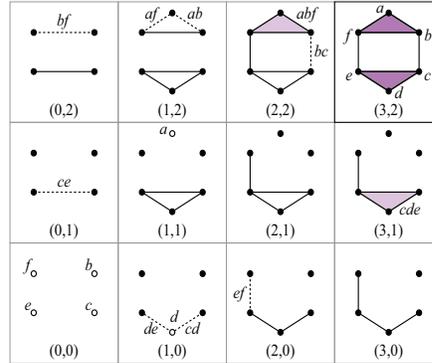


Fig. 15. Ejemplo de bifiltración de un complejo simplicial. Tomado de [5].

Observación 7.1 Debe notarse que para dos subcomplejos $K^{\vec{\alpha}}$ y $K^{\vec{\beta}}$ de una multifiltración no siempre se cumple que uno de ellos es subcomplejo del otro, como si ocurría en el caso de las filtraciones. Para ello note que puede ocurrir que no se cumpla $\vec{\alpha} \lesssim \vec{\beta}$ ni $\vec{\beta} \lesssim \vec{\alpha}$, como es el caso de (1,1) y (0,2), y puede observarse en la figura 15 que ninguno de los complejos de estas casillas es subcomplejo del otro. Debido a esto una multifiltración de un complejo simplicial K no puede codificarse como una secuencia anidada de subcomplejos simpliciales de K y por tanto no puede convertirse a una filtración. Esto tiene como consecuencia la imposibilidad de aplicar la persistencia homológica al caso multidimensional y con ello que no se pueda utilizar los intervalos de persistencia como una invariante de las multifiltraciones.

7.2. Persistencia en multifiltraciones

Las definiciones en el caso de la persistencia multidimensional como hemos visto hasta ahora están estrechamente relacionadas con las definiciones en el caso de una dimensión. En este apartado se dan elementos equivalentes a los expuestos en la sección 6 y específicamente equivalentes a los expuestos a partir de la definición 6.2, se darán los resultados principales y se dejará al lector la tarea de redefinir los restantes, ya que no presentan complicación alguna.

Definición 7.3 Sean $\vec{\alpha} \lesssim \vec{\beta}$ y sean $K^{\vec{\alpha}}$ y $K^{\vec{\beta}}$ subcomplejos de una multifiltración que se sabe cumplen que $K^{\vec{\alpha}} \subseteq K^{\vec{\beta}}$. Entonces el mapa de inclusión $K^{\vec{\alpha}} \xrightarrow{i} K^{\vec{\beta}}$ induce un **homomorfismo de inclusión** entre $H_d(K^{\vec{\alpha}})$ y $H_d(K^{\vec{\beta}})$ que se denota por $f_d^{\vec{\alpha}, \vec{\beta}} : H_d(K^{\vec{\alpha}}) \rightarrow H_d(K^{\vec{\beta}})$, para una determinada dimensión d . Este homomorfismo asigna a cada clase de homología $Z_{\vec{\alpha}} \in H_d(K^{\vec{\alpha}})$ la clase de homología $Z_{\vec{\beta}} \in H_d(K^{\vec{\beta}})$ que contiene a $Z_{\vec{\alpha}}$ ($f_p^{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}(Z_{\vec{\alpha}}) = Z_{\vec{\beta}}$).

Se debe tener en cuenta que en el caso multidimensional también se cumple que $f_d^{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}} = f_d^{\vec{\beta}, \vec{\gamma}} \circ f_d^{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}$ para $\vec{\alpha} \lesssim \vec{\beta} \lesssim \vec{\gamma}$.

Definición 7.4 Se llama **d -ésimo grupo de homología $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ -persistente multidimensional** de una multifiltración $\{K^{\vec{\alpha}}\}_{\vec{\alpha} \in R^n}$ de un complejo simplicial K , al grupo que se denota por $H_d^{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}$ y que se define como $H_d^{\vec{\alpha}, \vec{\beta}} = \text{img} f_d^{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}$. Por su parte el **d -ésimo número $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ -persistente multidimensional de betti** es el número $\beta_d^{\vec{\alpha}, \vec{\beta}} = \beta(H_d^{\vec{\alpha}, \vec{\beta}})$.

Definición 7.5 Sea $F : \{K^{\vec{\alpha}}\}_{\vec{\alpha} \in R^n}$ una multifiltración de un complejo simplicial K . Se llama **d -ésimo módulo de persistencia multidimensional asociado a F** a la familia $\{H_d(K^{\vec{\alpha}})\}_{\vec{\alpha} \in R^n}$ de los grupos de homología asociados a cada subcomplejo de la multifiltración F , junto a los homomorfismos $f_d^{\vec{\alpha}, \vec{\beta}} : H_d(K^{\vec{\alpha}}) \rightarrow H_d(K^{\vec{\beta}})$, para todos $\vec{\alpha} \lesssim \vec{\beta}$.

Definición 7.6 Sean $F : \{K^{\vec{\alpha}}\}_{\vec{\alpha} \in R^n}$ y $G : \{Q^{\vec{\beta}}\}_{\vec{\beta} \in R^n}$ multifiltraciones de complejos simplicial K y Q respectivamente, y sean $M_d^F : (\{H_d(K^{\vec{\alpha}})\}_{\vec{\alpha} \in R^n}, f_d^{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2})$ y $M_d^G : (\{H_d(Q^{\vec{\beta}})\}_{\vec{\beta} \in R^n}, g_d^{\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2})$ los d -ésimos módulos de persistencia multidimensional asociados a F y a Q respectivamente. Se dice que M_d^F y M_d^G son **isomorfos** si se cumple que $H_d(K^{\vec{\gamma}})$ y $H_d(Q^{\vec{\gamma}})$ son isomorfos con isomorfismo $I_d^{\vec{\gamma}} : H_d(K^{\vec{\gamma}}) \rightarrow H_d(Q^{\vec{\gamma}})$, para todo $\vec{\gamma}$ tal que al menos uno entre $K^{\vec{\gamma}}$ y $Q^{\vec{\gamma}}$ exista, y además se cumple para $f_d^{\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2} : H_d(K^{\vec{\gamma}_1}) \rightarrow H_d(K^{\vec{\gamma}_2})$ y $g_d^{\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2} : H_d(Q^{\vec{\gamma}_1}) \rightarrow H_d(Q^{\vec{\gamma}_2})$ que si $f_d^{\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2}(h_{\vec{\gamma}_1}) = h_{\vec{\gamma}_2}$ entonces $g_d^{\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2}(I_d^{\vec{\gamma}_1}(h_{\vec{\gamma}_1})) = I_d^{\vec{\gamma}_2}(h_{\vec{\gamma}_2})$.

Al igual que en el caso de la persistencia en una dimensión, la relación de isomorfismo definida en un conjunto de módulos de persistencia multidimensional es una relación de equivalencia. Como sabemos, esto implica que se puede particionar cualquier conjunto de módulos de persistencia multidimensional en clases. Esta partición cumpliría que módulos de persistencia multidimensional en una misma clase son isomorfos y módulos de persistencia multidimensional en clases diferentes no son isomorfos.

Como es de esperar en este punto, la comunidad ha centrado sus esfuerzos en encontrar una invariante completa para el caso de la persistencia multidimensional. Siempre teniendo en cuenta la restricción de que la invariante permita el desarrollo de algoritmos eficientes para su utilización en problemas reales. Este problema no tiene solución aún, aunque los autores en [24] se muestran pesimistas de acuerdo a los resultados que han alcanzado. A causa de la imposibilidad de encontrar una invariante completa se han centrado los esfuerzos también en encontrar invariantes eficientes de computar aunque no sean completas. En todos los casos tratando de maximizar el poder discriminatorio de la invariante. En este sentido surge la invariante que se expone en la sección 7.3.

En el caso de la persistencia homológica unidimensional se introdujo una distancia entre conjuntos de intervalos de persistencia que se podía interpretar como una distancia entre módulos de persistencia. En el caso multidimensional como ha sido costumbre se ha tratado de extender este resultado. Al no contar con una invariante completa que represente a los módulos de persistencia multidimensional, se han centrado los esfuerzos en introducir distancias definidas directamente entre los módulos de persistencia multidimensional. Los principales resultados alcanzados en esta dirección son [27,28,29,30,31].

7.3. Invariante del rango

Dada una multifiltración $\{K^{\vec{\alpha}}\}_{\vec{\alpha} \in R^n}$, como ya conocemos se pueden definir en cada subcomplejo $K^{\vec{\alpha}}$ los grupos de homología $H_d(K^{\vec{\alpha}})$, para cada dimensión d . La invariante del rango es una función que captura los cambios que ocurren entre los grupos de homología de $K^{\vec{\alpha}}$ y $K^{\vec{\beta}}$ siempre que $\vec{\alpha} \lesssim \vec{\beta}$.

Los autores de [24] demuestran que cuando la dimensión es solo una, es decir cuando se trata de persistencia homológica unidimensional, la invariante del rango es completa y concuerda con la invariante completa introducida en la sección 6.

Definición 7.7 [24] Sea $\mathbb{N}' = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, queda definido el conjunto \mathbb{D}^n como $\mathbb{D}^n = \{(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \mid \vec{\alpha} \in \mathbb{N}^n, \vec{\beta} \in \mathbb{N}^n, \vec{\alpha} \lesssim \vec{\beta}\}$.

Definición 7.8 [24] Sea $F : \{K^{\vec{\alpha}}\}_{\vec{\alpha} \in \mathbb{N}^n}$ una multifiltración de un complejo simplicial K , se llama invariante del rango para cada dimensión d de K a la función $\rho_{F,d} : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{N}$, que tiene como expresión:

$$\rho_{F,d}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \beta_d^{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}. \quad (4)$$

El objetivo de esta función es dar como valor, dado un elemento $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \in \mathbb{D}^n$, la cantidad de d -ciclos no bordes que hay en $K^{\vec{\alpha}}$ y que cumplen que persisten o no han muerto en $K^{\vec{\beta}}$. Debe notarse que \mathbb{D}^n está definido de modo que si $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \in \mathbb{D}^n$ entonces $K^{\vec{\alpha}}$ siempre es subcomplejo de $K^{\vec{\beta}}$.

Los autores de [5] proponen en este trabajo un algoritmo con complejidad temporal para el caso peor de $O(n^7)$ para el cálculo de la invariante del rango, donde n concuerda con el número de simplices del complejo simplicial en cuestión. Este algoritmo no es útil en para su aplicación en problemas reales, debido su alta complejidad temporal, por lo cual se continúa buscando algoritmos que mitiguen esta dificultad.

8. Conclusiones

En este trabajo se han detallado elementos básicos de herramientas matemáticas provenientes del campo de la topología algebraica, conocidas como *homología simplicial* y *persistencia homológica*. Se ha hecho uso, en la medida de lo posible, de explicaciones intuitivas que dan valor al trabajo como introducción a este tema, que resulta de alta complejidad.

Debido a la amplia presencia de espacios métricos en problemas de la práctica, y debido a que todo espacio métrico induce un espacio topológico, la utilidad de las herramientas introducidas y la capacidad que tienen para ser aplicadas en infinidad de problemas existentes es inminente. No se ha hecho especial énfasis en las aplicaciones prácticas de estas herramientas ya que va más allá de los objetivos del trabajo. No obstante se reportan aplicaciones exitosas en investigaciones en el área de reconocimiento de patrones y en otras áreas, entre las que se encuentran las referenciadas en la introducción de este trabajo. Note que esto contrasta con el carácter novedoso de estas herramientas que actualmente continúan desarrollándose.

La persistencia homológica solo requiere de un espacio topológico filtrado o multifiltrado para ser aplicada. Como anteriormente se dijo, estas condiciones son muy comunes en problemas prácticos, lo que hace de la persistencia una herramienta a tener siempre en cuenta. En este sentido la persistencia queda favorecida, pero a su vez surge un problema que actualmente no ha sido tratado con énfasis. Este consiste en que la posibilidad de aplicar esta herramienta a tal variedad de problemas no asegura una solución exitosa en todos los casos. En este sentido es necesario extraer cualidades claras de la persistencia que permitan decantarse por ella o rechazarla para la solución de un problema determinado.

Por otra parte, el tema de la persistencia multidimensional presenta problemas sin solución y parcialmente resueltos, en los cuales actualmente se centra la atención. Actualmente no se ha encontrado una invariante completa para este caso, surge entonces la incógnita de la existencia de tal invariante. De existir una invariante completa en el caso multidimensional entonces surgirían otras interrogantes orientadas al cálculo de tal invariante y a su eficiencia. De no existir tal invariante entonces se cae en el problema de las

invariantes no completas. En este sentido se han introducido invariantes, como la invariante del rango, pero también surge el problema de la eficiencia del cálculo. Como se vio en el caso introducido en este trabajo es una dificultad que frena su uso en muchos problemas a resolver. También la posibilidad de contar con más de una invariante no completa introduciría dificultades como la comparación de dos invariantes para decidir cuál es mejor y con respecto a qué tipo de problemas.

Finalmente un grave problema se presenta en el cálculo de las distancias definidas entre los módulos de persistencia unidimensional y multidimensional. Los algoritmos existentes para estos propósitos son muy costosos y por tanto generalmente no aplicables a problemas reales.

Referencias bibliográficas

1. Oudot, F.C.G., Skraba, P.: Persistence-based clustering in riemannian manifolds. (2009)
2. Letscher, D., Fritts, J.: Image segmentation using topological persistence. In: *Computer Analysis of Images and Patterns*, Springer (2007) 587–595
3. Skraba, P., Ovsjanikov, M., Chazal, F., Guibas, L.: Persistence-based segmentation of deformable shapes. In: *Computer Vision and Pattern Recognition Workshops (CVPRW)*, 2010 IEEE Computer Society Conference on, IEEE (2010) 45–52
4. Zomorodian, A.: *Topology for Computing*. Cambridge University Press, New York, NY (2009)
5. Carlsson, G., Singh, G., Zomorodian, A.: Computing multidimensional persistence. CoRR **abs/0907.2423** (2009)
6. Freedman, D., Chen, C.: Algebraic topology for computer vision. Technical Report HPL-2009-375, Hewlett Packard Laboratories (December 17 2009)
7. Zomorodian, A.: Computational topology. In Atallah, M., Blanton, M., eds.: *Algorithms and Theory of Computation Handbook*. Volume 2. 2nd edn. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, FL (2010)
8. Edelsbrunner, H., Harer, J.: Persistent homology—a survey. *Contemporary mathematics* **453** (2008) 257–282
9. Ghrist, R., Muhammad, A.: Coverage and hole-detection in sensor networks via homology. In: *Proceedings of the 4th international symposium on Information processing in sensor networks*, IEEE Press (2005) 34
10. Lamar-Leon, J., Baryolo, R.A., Garcia-Reyes, E., Gonzalez-Diaz, R.: Gait-based carried object detection using persistent homology. In: *Progress in Pattern Recognition, Image Analysis, Computer Vision, and Applications*. Springer (2014) 836–843
11. Cohen-Steiner, D., Edelsbrunner, H., Morozov, D.: Vines and vineyards by updating persistence in linear time. In: *Proceedings of the twenty-second annual symposium on Computational geometry*, ACM (2006) 119–126
12. Edelsbrunner, H.: Surface tiling with differential topology. In: *Symposium on Geometry Processing*. (2005) 9–11
13. Lamar-León, J., Reyes, E.B.G., González-Díaz, R.: Human gait identification using persistent homology. In Álvarez, L., Mejail, M., Gómez, L., Jacobo, J.C., eds.: *CIARP*. Volume 7441 of *Lecture Notes in Computer Science*., Springer (2012) 244–251
14. Bendich, P., Edelsbrunner, H., Kerber, M.: Computing robustness and persistence for images. *Visualization and Computer Graphics*, *IEEE Transactions on* **16**(6) (2010) 1251–1260
15. Munkres, J.R.: *Topología*. 2da edición. Pearson Education S.A (2002)
16. Fraleigh, J.B., Mateos, M.L., Ochsnius, H.: *Algebra abstracta: primer curso*. Addison-Wesley Iberoamericana (1987)
17. Markov, A.A.: Insolubility of the problem of homeomorphy. In: *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. Volume 121. (1958) 8
18. Edelsbrunner, H., Harer, J.L.: *Computational topology: an introduction*. American Mathematical Soc. (2010)
19. Edelsbrunner, H., Letscher, D., Zomorodian, A.: Topological persistence and simplification. *Discrete & Comput. Geometry* **28**(4) (2002) 511–533
20. Zomorodian, A., Carlsson, G.: Computing persistent homology. *Discrete & Computational Geometry* **33**(2) (2005) 249–274
21. Cohen-Steiner, D., Edelsbrunner, H., Harer, J.: Stability of persistence diagrams. *Discrete & Computational Geometry* **37**(1) (2007) 103–120
22. Delfinado, C.J.A., Edelsbrunner, H.: An incremental algorithm for betti numbers of simplicial complexes. In: *Proc. of the 9th annual symposium on Computational geometry*. SCG '93, ACM (1993) 232–239
23. Edelsbrunner, H., Morozov, D.: *Persistent homology: Theory and practice*. Mathematics Subject Classification (2010)
24. Carlsson, G., Zomorodian, A.: The theory of multidimensional persistence. *Discrete & Computational Geometry* **42**(1) (2009) 71–93
25. Lesnick, M.: The optimality of the interleaving distance on multidimensional persistence modules. Technical report, Stanford University (2011)
26. Cavazza, N., Ethier, M., Frosini, P., Kaczynski, T., Landi, C.: Comparison of persistent homologies for vector functions: from continuous to discrete and back. *Computers & Mathematics with Applications* **66**(4) (2013) 560–573

30 Raúl Antonio Alonso Baryolo, Edel Bartolo García Reyes y Javier Lamar León

27. Carlsson, G., Mémoli, F.: Multiparameter hierarchical clustering methods. In: Classification as a Tool for Research. Springer (2010) 63–70
28. Cerri, A., Di Fabio, B., Ferri, M., Frosini, P., Landi, C.: Multidimensional persistent homology is stable. arXiv preprint arXiv:0908.0064 (2009)
29. Frosini, P.: Stable comparison of multidimensional persistent homology groups with torsion. Acta applicandae mathematicae **124**(1) (2013) 43–54
30. Ishkhanov, T.: A topological method for shape comparison. In: Computer Vision and Pattern Recognition Workshops, 2008. CVPRW'08. IEEE Computer Society Conference on, IEEE (2008) 1–4
31. Lesnick, M.: The theory of the interleaving distance on multidimensional persistence modules. arXiv preprint arXiv:1106.5305 (2011)

Anexo 1 - Grupos de Investigación y Sitios de Interés

- (CATAM) Computational Algebraic Topology and Applied Mathematics. Andalusian research group FQM-296
(<http://munkres.us.es:8080/groups/catam>)
- (ALTA) Institute for Algebra, Geometry, Topology and their applications
(<http://www.alta.uni-bremen.de>)
- (ACAT) Applied and Computational Algebraic Topology
(<http://acat.lix.polytechnique.fr>)
- (ComTop) Applied and Computational Algebraic Topology
(<http://comptop.stanford.edu>)
- AlgTop-Conf
(<http://nilesjohnson.net/algtop-conf>)
- (<http://appliedtopology.org>)

RT_073, mayo 2015

Aprobado por el Consejo Científico CENATAV

Derechos Reservados © CENATAV 2015

Editor: Lic. Lucía González Bayona

Diseño de Portada: Di. Alejandro Pérez Abraham

RNPS No. 2142

ISSN 2072-6287

Indicaciones para los Autores:

Seguir la plantilla que aparece en www.cenatav.co.cu

C E N A T A V

7ma. A No. 21406 e/214 y 216, Rpto. Siboney, Playa;

La Habana. Cuba. C.P. 12200

Impreso en Cuba

