RNPS No. 2142
ISSN 2072-6287
Versión Digital

CENATAV
Centro de Aplicaciones de Tecnologías de Avanzada
MINISTERIO DE LA INDUSTRIA BÁSICA

REPORTE TÉCNICO
Reconocimiento de Patrones

SERIE AZUL

Métodos de reconocimiento de objetos 3D basados en enfoques topológicos: estado del arte

Javier Lamar León y Edel García Reyes

RT_052 mayo 2013

7ma. No. 21812 e/218 y 222,
Rpto. Siboney, Playa;
La Habana.
Cuba. C.P. 12200
www.cenatav.co.cu

RNPS No. 2142
ISSN 2072-6287
Versión Digital

CENATAV
Centro de Aplicaciones de Tecnologías de Avanzada
MINISTERIO DE LA INDUSTRIA BÁSICA

SERIE AZUL

REPORTE TÉCNICO
Reconocimiento de Patrones

Métodos de reconocimiento de objetos 3D basados en enfoques topológicos: estado del arte

Javier Lamar León y Edel García Reyes

RT_052 **mayo 2013**

7ma. No. 21812 e/218 y 222,
Rpto. Siboney, Playa;
La Habana.
Cuba. C.P. 12200
www.cenatav.co.cu

Tabla de contenido

1. Introducción 1
   1.1. Topología 2
   1.2. Espacio topológico 3
   1.3. Complejo simplicial 4
   1.4. Filtración y Filtro 6
   1.5. Invariantes topológicos 7
2. Estrategias para obtener invariantes topológicos 8
   2.1. Topología algebraica 8
      2.1.1. r-cadenas 9
      2.1.2. Operador frontera 9
      2.1.3. r-ciclos 10
      2.1.4. r-frontera 10
      2.1.5. Grupos de homología 10
   2.2. Reducción de espacios 11
      2.2.1. Colapsado de celdas 11
      2.2.2. Teoría discreta de Morse 12
      2.2.3. Esqueletos topológicos 13
      2.2.4. Pirámide irregular de grafos 14
   2.3. Caracterización topológica usando deficiencias convexas 15
3. Bases de datos 16
4. Revistas y eventos que publican el tema 18
   4.1. Revistas 18
   4.2. Eventos 18
5. Conclusiones 18
Referencias bibliográficas 20

Lista de figuras

1. (a)tasa (b) dona o toro sólido. 2
2. Espacios, (a) conjunto de puntos, (b) espacio topológico, (c) espacio métrico 3
3. (a) Nube de puntos generada por un escáner 3D sobre la superficie, (b) Complejo simplicial. . . 4
4. Corte a la tetraedrización realizada sobre la nube de punto que representa una bola o esfera maciza. Complejo simplicial, con tetraedros como elementos de máxima dimensión. 5
5. El punto P es la combinación convexa de los tres puntos $\{V_1, V_2, V_3\}$, todos los puntos dentro la región limitada por las aristas del triángulo(región sombreada) son una combinación convexa de estos tres puntos, esto coincide con la envoltura convexa para $\{V_1, V_2, V_3\}$. El punto Q no es combinación convexa de $\{V_1, V_2, V_3\}$. 6
6. $k-simplices$ para $0 \leq k \leq 3$. 6
7. . Filtración ordenada (filtro) sobre un complejo simplicial, formado por un triángulo y todas sus caras. En rojo el símplice que se agrega. 7
8. Derecha cuerda y cuerda con un corte, izquierda lazo y lazo con un corte. 7
9. Derecha esfera y esfera con un corte, izquierda toro y toro con un corte. 8
10. Complejo de celdas M [1]. 9

11. Colapsado de un tetraedro. 11
12. (a) complejo de celda inicial, (b) complejo colapsado. 11
13. Cuerpos triangulados por sus límites, en el toro se han eliminado unas celdas, para ver su interior, que está vacío. 12
14. (a) campo de vectores de gradiente discreto donde parean las celdas de la cola y la cabeza de la flecha y aquellas celdas que no posean ni cabeza ni cola son críticas, (b) no es un campo de vectores de gradiente discreto por poseer un ciclo. 12
15. (a) secuencia de celdas formando un ciclo, (b) camino de gradiente discreto (flechas en rojo). . . 12
16. Esqueletos. 13
17. (a) Complejo de celdas con 4 intervalos, (b) celdas (triángulos) divididos para que todos estén en un solo nivel, (c) nodos representando grupos de triángulos de un mismo nivel y componente conexa, (d) aristas uniendo nodos de niveles vecinos (adyacentes) [2]. 14
18. Grafos multiresolución, construidos usando la función de altura a cuatro niveles diferentes [3]. 14
19. Objetos representados mediante la distribución de la función de altura. 15
20. Distribución de la función basada en la distancia geodésica. 15
21. Toro (izquierda) y su estructura convexa (derecha). 16
22. Objeto y sus deficiencias convexas [4]. 16
23. Taxonomía de los algoritmos, para obtener descriptores topológicos. 16
24. Taxonomía según repositorio de formas AIM@SHAPE SR. 17

Métodos de reconocimiento de objetos 3D basados en enfoques topológicos: estado del arte

Javier Lamar León y Edel García Reyes

Dpto. Reconocimiento de Patrones, Centro de Aplicaciones de Tecnologías de Avanzada(CENATAV),
La Habana, Cuba
{jlamar,egarcia}@cenatav.co.cu

RT_052, Serie Azul, CENATAV
Aceptado: 15 de abril de 2013

Resumen. En este trabajo se aborda la temática referente a descriptores topológicos de objetos 3D. Son tratados aspectos de topología algebraica (grupos de homología), deficiencias convexas, reducción de espacios topológico como colapsado, operador integral, pirámide irregular de grafos, grafos Reeb y teoría discreta de Morse, como estrategias para obtener los invariantes topológicos. En cada sección se dan criterios de ventajas y desventajas de los algoritmos. Se informa de revistas y eventos que siguen el tema, las bases de datos más usadas en los experimentos, su forma de obtención y manipulación. Finalmente, se propone una taxonomía que organiza las estrategias.
Palabras clave: descriptores topológicos, espacio topológico, invariantes topológicos.

Abstract. In this report, we present a survey of 3D object topology descriptors. Algebraic topology (homology groups), topological space reduction such as collapsing, integral operator, irregular graph pyramids, Reeb graph and discrete Morse theory are reviewed. Furthermore, advantage and disadvantage of these algorithms are given.
Keywords: topological descriptors, topological spaces, topological invariants.

1. Introducción

Los humanos poseen la capacidad de reconocer objetos, usando un código intuitivo, establecido de un aprendizaje anterior. El modelado matemático de esta capacidad humana siempre ha sido un punto de mira en las investigaciones de todos los tiempos, ya que es usado en innumerables aplicaciones.

El hombre combina indistintamente un conjunto de características del objeto (tono, textura, forma, topología...etc.) y de su entorno para reconocerlo, por tanto, el objetivo principal del modelado del reconocimiento automático de objetos (usando ordenadores), está centrado en lograr un grupo de características que los discriminen, al menos, en grupos por clases (hombres, autos, árboles...etc.).

El nombre comúnmente dado en la literatura científica, a este grupo de características es "descriptores de objetos", que lo sustituyen para realizar tareas de reconocimiento, clasificación, recobrado de objetos, indexado, etc.

Los objetos inicialmente aparecen en las computadora en forma de imágenes, formadas por pixeles (2-dimensión) o por voxeles (3-dimensión), además, usando la variable tiempo (t) logramos una tercera dimensión ($2d+t$) (video). Muchos de los descriptores se obtienen a partir de estas imágenes y otros, de haber transformado el espacio de representación (espacio de frecuencias, espacio topológico, etc.).

Este trabajo se centra específicamente en una revisión de los métodos para obtener descriptores topológicos de objetos 3D. Siendo estricto en el concepto de topología, las características extraídas de los objetos, tienen que ser invariantes a deformaciones (sin pegar o cortar partes del objeto). Ejemplos de estas características son las componentes conexas, agujeros, cavidades, número de euler, etc.

La topología ha encontrado mayores aplicaciones en áreas donde se requiera describir objetos topológicamente (imágenes médicas, compuestos químicos...etc.) en función de sus huecos a diferentes dimensiones, cuando se requiere de tareas de cotejo entre objetos (reconocimiento, clasificación, recobrado, etc.), la topología no ofrece un poder alto de discriminación; con solo recordar que una tasa es igual a una dona o toro sólido. Aunque, encontramos trabajos que logran obtener características que se ajustan, hasta cierto punto, a las propiedades de los invariantes topológicos, usando los grafos Reeb (esqueletos topológicos), con buenos resultados [3] o usando invariantes topológicos más finos, como la cohomología y homotopía, pero necesitan algoritmos más complicados y costosos. Por ello, hay investigadores que tratan de reducir el espacio de representación del objeto (complejo de celdas, imagen...etc.) [5,6,3], para luego aplicar métodos algebraicos o el mismo espacio reducido brinda los invariantes [5].

1.1. Topología

La topología, como la geometría, son herramientas útiles para la descripción de los objetos. La topología trata a los objetos como si fuesen de plastilina, es decir, desde el punto de vista topológico, las deformaciones continuas realizadas a un trozo de plastilina, sin cortar, ni hacerle agujeros ni autopegados, son en todo momento objetos equivalentes, aunque sean de tamaños muy diferentes. Cuando un objeto puede ser transformado de forma continua a otro objeto y viceversa, entonces son topológicamente equivalentes y a esta equivalencia se le llama *homeomorfismo*. En la Figura 1 se muestran dos objetos que son homeomorfos (equivalentes).

(a) (b)

Fig. 1. (a)tasa (b) dona o toro sólido.

Con esta idea de deformación continua es muy difícil saber cuándo dos objetos son equivalentes. Si consideramos dos objetos A y B la cuestión sería encontrar una función f entre estos dos objetos, que fuese continua y biyectiva. Existe un número considerable de funciones f entre estos dos objetos, pero, encontrar una que cumpla estas propiedades puede ser muy difícil y costoso. Para hacer este proceso de clasificación de los objetos viable, se utilizan los *invariantes topologicos*. Los invariantes son números, grupos, polinomios, etc. que son calculados a cada objeto; donde los objetos pertenecientes al mismo grupo de equivalencia poseen iguales invariantes. El número de componentes conexas, agujeros y cavidades son invariantes numéricos. Según la Figura 1, ambos cuerpos tienen una componente conexa, un agujero y ninguna cavidad. Con el uso de los invariantes no podemos asegurar cuando dos objetos son homeomorfos, pero si exciten diferencias en los invariantes, podemos asegurar que son topológicamente diferentes. Los objetos a los que hacemos referencias, sin ser tan rigurosos, pueden ser llamados *espacios topologicos*.

1.2. Espacio topológico

Daremos una explicación muy intuitiva del concepto de espacio topológico. Sin ser rigurosos, un *espacio* es un conjunto de puntos (Figura 2a). Este espacio resulta ser muy débil al no poseer una estructura, entonces podemos dotar al espacio de una estructura topológica. La topología de un espacio brinda la información de vecindad de los puntos, es decir, como está conectado el espacio de los puntos (Figura 2b). Un caso particular de espacio topológico es el espacio métrico (Figura 2c), el cual tiene asociado una función de distancia, permitiendo medir distancia entre puntos y consecuentemente establecer vecindades.

Dada una visión muy intuitiva de los elementos fundamentales de la topología, daremos ahora algunas de sus definiciones desde un punto de vista matemático:

Espacio topológico:
Un espacio topológico es un conjunto E de elementos junto con T, una colección de subconjuntos de E que satisfacen las siguientes propiedades:
a) $\varnothing \in T, E \in T$
b) $(O_1 \in T, O_2 \in T) \Rightarrow (O_1 \cap O_2 \in T)$
c) $(\forall \in I, O_i \in T) \Rightarrow (\cup_{i \in I} O_i \in T)$

La colección T es llamada topología en E. Los elementos de E suelen llamarse puntos, aunque pueden ser cualquiera de los objetos matemáticos, por ejemplo, un espacio topológico en el cual los puntos son funciones es llamado un espacio funcional.

Homemorfismo:
Dos espacios topológicos X y Y son homeomorfos o topológicamente equivalentes si existe una función biyectiva $f : X \to Y$ tal que f y f^{-1} son continuas.

Otras definicioines relacionadas con la topología, como grupo, anillo..etc, pueden ser encontradas en libros de matemática elemental de teoría de conjuntos y grupos.

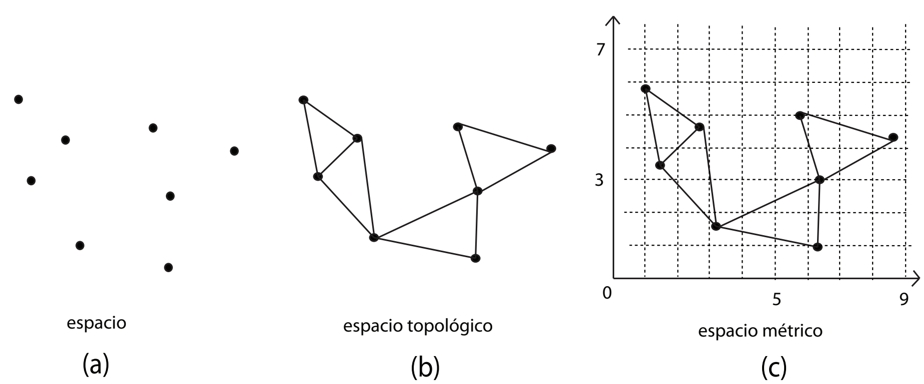


Fig. 2. Espacios, (a) conjunto de puntos, (b) espacio topológico, (c) espacio métrico .

Los objetos del mundo real, usualmente son llevados a las computadoras mediante una nube de puntos, inmersa en un espacio 3D, es decir, cumplen la condición de un espacio métrico, seguido de ello, establecemos conexiones formando elementos primarios de la geometría (triángulos, polígonos, etc.). Una de las estructuras resultante de este proceso, más usadas en las computadoras, para representar los objetos y explorarlos desde el punto de vista topológico, son los *complejos simpliciales*.

1.3. Complejo simplicial

El uso de las computadoras para la solución de muchos problemas, nos obliga a discretizar los datos, por ejemplo, la representación de superficies (objetos) es usualmente llevada a las computadoras mediante triangulaciones. Un proceso muy común es usar un escáner 3D para generar una nube de puntos de la superficie borde de los objetos y luego conseguir una triangulación, donde los elementos de máxima dimensión son los triángulos, los cuales están insertados en un espacio 3D. Si consideramos las imágenes generadas por una tomografía axial computarizada (TAC), en este caso contamos con una nube de puntos de todo el volumen. Para representar estos objetos son usados como elementos de máxima dimensión los tetraedros. A esta manera de representar los objetos en las computadoras es a lo que llamamos complejo simplicial y a sus elementos, vértices, aristas, triángulos, tetraedros y homólogos a mayor dimensión, símplices. La construcción de espacios más complejos (objetos) mediante la unión de espacios más sencillos (símplices), obteniendo complejos simpliciales, se hace llamar, Topología Combinatoria.

La Figura 3 muestra el complejo simplicial construido de la nube de puntos generada por un escáner sobre la superficie de una vaca, con triángulos como elementos de máxima dimensión, insertado en un espacio 3D y la Figura 4 muestra un corte al complejo simplicial construido a partir de una nube de puntos de todo el volumen de una bola o esfera maciza, lo cual pudo lograrse mediante un *TAC*, con tetraedros como elementos de máxima dimensión.

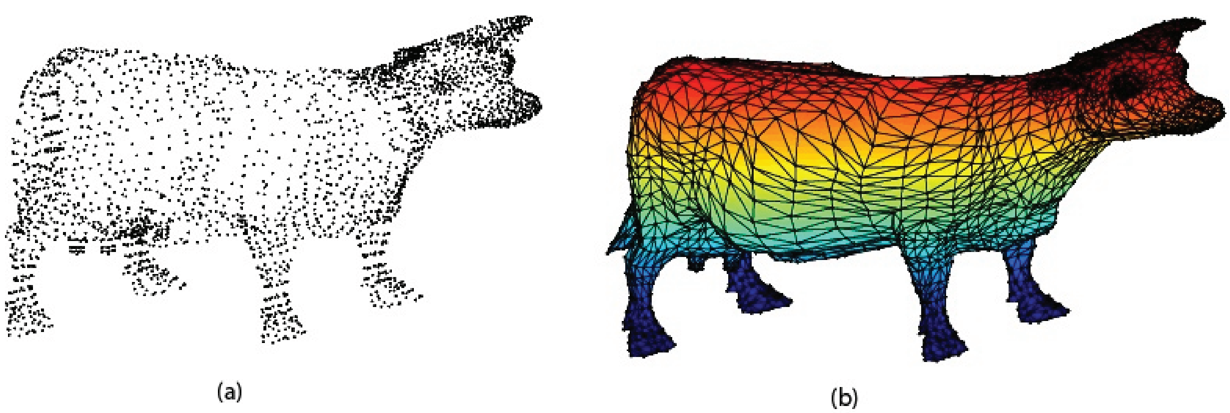


Fig. 3. (a) Nube de puntos generada por un escáner 3D sobre la superficie, (b) Complejo simplicial.

Los complejos simpliciales son los mayormente usados debido a que su manejo en las computadoras es más simple. Aunque también pueden ser vistos complejos poligonales, formados por vértices, aristas y polígonos, complejos cubitales formados por vértices, aristas, cuadrados y cubos, complejos poliédricos, formados por vértices, aristas, polígonos y poliedros. De forma general, todo complejo puede ser llamado complejo de celdas, siendo las n-celdas los elementos que forman el complejo, donde n es la dimensión de la celda, comenzando con la 0-*cell* (vértice), 1-*cell* (arista), etc.

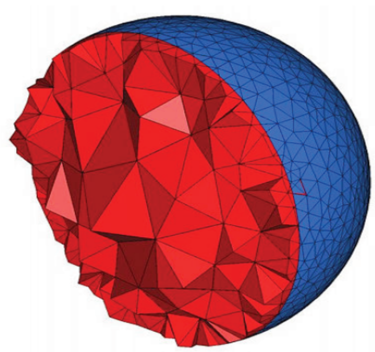


Fig. 4. Corte a la tetraedrización realizada sobre la nube de punto que representa una bola o esfera maciza. Complejo simplicial, con tetraedros como elementos de máxima dimensión.

Los complejos simpliciales separan la topología de un espacio (objeto) de su geometría, es decir, a través de los complejos simpliciales contamos con la materia prima para conseguir los rasgos topológicos de los objetos.

Hasta aquí hemos dado una explicación muy intuitiva del concepto de complejo simplicial, ahora, un poco mas rigurosos, desde el punto de vista matemático, definiremos símplices y complejo simplicial.

Para ello comenzamos con algunas definiciones para dar el concepto de *k-simplices* y finalmente el de complejo simplicial.

Definición (combinación): Sea $S = \{p_0, p_1, ...p_k\} \subseteq \mathbb{R}^d$ y $x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i$ la combinación lineal de los elementos de S donde $\lambda_i \in \mathbb{R}$. La combinación afín es una combinación lineal donde $\sum \lambda_i = 1$. La combinación convexa es una combinación afín donde $\lambda_i \geq 0$ para todo i. El conjunto de todas las combinaciones convexas es llamada envoltura convexa.

Definición (independencia): Un conjunto $S = \{p_0, p_1, ...p_k\}$ es linealmente independiente si ninguno de sus puntos p_i es una combinación lineal de otros puntos de S.

Definición (*k-simplices*): Un *k-simplices* es la envoltura convexa de $k+1$ puntos independientes afines de $S = \{v_0, v_1, ...v_k\}$. Los puntos de S son los vértices del símplices.

Todas las posibles combinaciones convexas están en la envoltura convexa de los puntos dados en $S = \{v_0, v_1, ...v_k\}$, por ejemplo, en la Figura 5 el punto P es una combinación convexa de los tres puntos V_1, V_2, V_3, es decir, $P = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3$, donde $\sum \lambda_i = 1$ y todo $\lambda_i \geq 0$. Todos los puntos que se encuentran en la región sombreada, limitada por las aristas del triángulo, son combinaciones convexas de los tres puntos $\{V_1, V_2, V_3\}$, este conjunto de puntos es la envoltura convexa y coincide con un 2-*simplices* en $\mathbb{R}^2$, en cambio, el punto Q no es parte del conjunto de la envoltura convexa. En la Figura 6 se nombran los símplices de menor dimensión.

Definición (cara y cocara): Sea σ ser un $k-simplices$ definido por $S = \{v_0, v_1, ...v_k\}$. Un símplices τ definido por $T \subseteq S$ es una *cara* de σ y tiene a σ como *cocara*. El número de caras en un símplices es 2^{k+1} teniendo presente que contamos además el (-1-*simplices*)$= \theta$ y al propio σ.

Definición (complejo simplicial): Un complejo simplicial K es un un conjunto de símplices tal que:
(a) $\sigma \in K, \tau \leq \sigma \Rightarrow \tau \in K$;

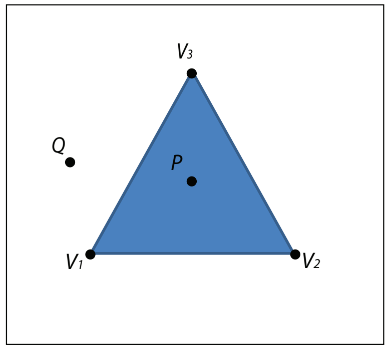


Fig. 5. El punto P es la combinación convexa de los tres puntos $\{V_1,V_2,V_3\}$, todos los puntos dentro la región limitada por las aristas del triángulo(región sombreada) son una combinación convexa de estos tres puntos, esto coincide con la envoltura convexa para $\{V_1,V_2,V_3\}$. El punto Q no es combinación convexa de $\{V_1,V_2,V_3\}$.

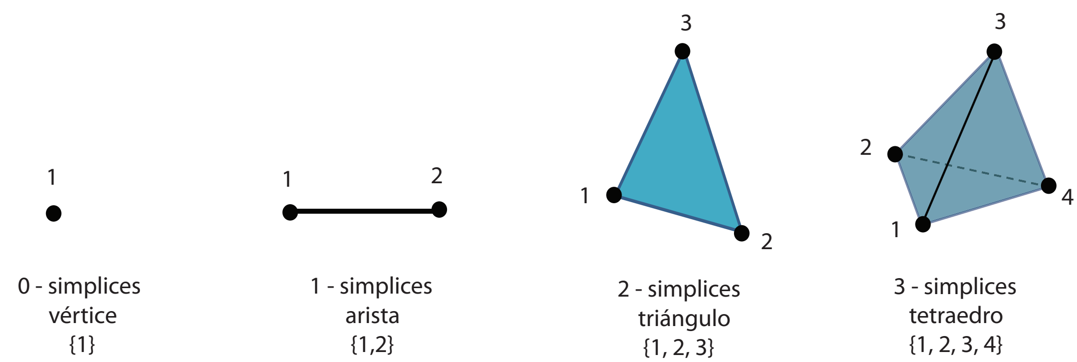


Fig. 6. $k - simplices$ para $0 \leq k \leq 3$.

(b) $\sigma, \sigma^{'} \in K \Rightarrow \sigma \cap \sigma^{'} \leq \sigma, \sigma^{'}$.

La dimensión de K es la máxima dimensión de los símplices en K, $dim(K) = max\{dim(\sigma) \mid \sigma \in K\}$.

Un algoritmo muy usado para conseguir las triangulaciones sobre un conjunto de puntos, es el algoritmo de Delaunay. la librería *CGAL* presenta varios algoritmos implementados sobre C++ para la obtención de complejos.

1.4. Filtración y Filtro

Un subcomplejo de un complejo simplicial K es un complejo simplicial $L \subseteq K$. Una filtración de un complejo K es una secuencia anidada de subcomplejos, $\phi = K^0 \subseteq K^1 \subseteq K^2 \subseteq ... \subseteq K^m$. Un complejo al cual se le ha asignado una filtración, es un complejo filtrado. Un complejo $K^{i+1} = K^i \bigcup \delta^i$, donde δ es un conjunto de símplices y los símplices en δ poseen un orden parcial.

Una $filtracion\ ordenada$ o $filtro$ de un complejo K es un ordenamiento completo de sus símplices, donde cada prefijo i es un subcomplejo de K. Podemos indexar los símplices de K por su rango en la filtración ordenada, es decir, podemos ir construyendo el complejo simplicial K a cada paso que agregamos un símplice σ^i, donde $K^0 = \phi$ y para $i > 0$ $K^i = \{\phi^j | j \leq i\}$. Solo podremos agregar un símplice σ^i, si y solo si, sus caras han sido agregadas, es decir, para agregar una arista, los vértices de sus extremos tienen que estar agregados. Mediante la filtración ordenada la geometría del espacio queda codificada. En la Figura 7 se muestra un ejemplo muy sencillo de un complejo simplicial ordenado.

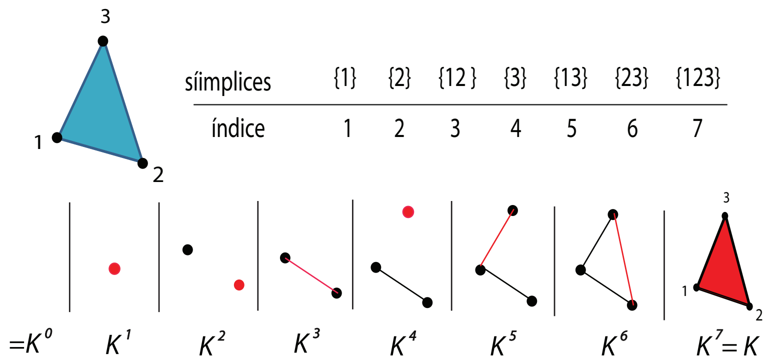


Fig. 7. . Filtración ordenada (filtro) sobre un complejo simplicial, formado por un triángulo y todas sus caras. En rojo el símplice que se agrega.

1.5. Invariantes topológicos

Como antes mencionamos, los invariantes topológicos son características de los espacios topológicos que no cambian ante transformaciones continuas sobre el espacio (sin cortar, realizar autopegados, etc.), es conocer como está conectado el espacio. Por ejemplo, la Figura 8, muestra dos cuerdas, una de ellas formando un lazo. Una manera de conocer si están conectadas de igual manera, es precisamente afectar su conectividad realizando un corte. Según la Figura 8, es obvio la diferencia del resultado. Ahora consideramos una esfera (vacía en su interior) y un toro (Figura 9); cualquier corte que intentemos sobre la esfera obtendremos dos partes, mientras en el toro, según la disposición del corte de la Figura 9, conseguimos solo una parte. Ambos cuerpos, también poseen conectividades diferentes.

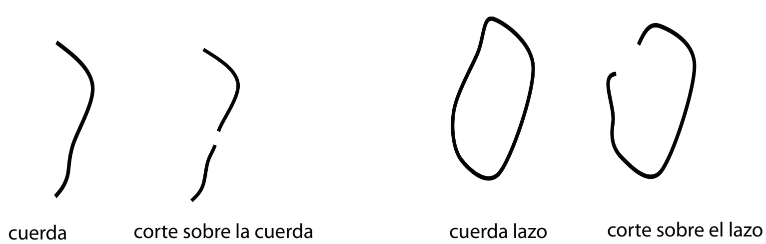


Fig. 8. Derecha cuerda y cuerda con un corte, izquierda lazo y lazo con un corte.

Para el ejemplo de las cuerdas, es fácil ver que en el lazo, todos los puntos poseen dos vecinos, uno a la derecha y otro a la izquierda, sin embargo, la otra cuerda, el punto en sus extremos solo tiene un vecino. Cuando cortamos el lazo, los puntos que antes eran los más cercanos, ahora resultan ser los más lejanos. En la cuerda, los puntos que han quedado separados por el corte, no son, ni al menos vecinos, es decir, no existe camino entre ellos. En el caso del corte en las cuerdas los extremos (límites) son puntos, pero para el corte sobre la esfera y el toro sus extremos son lazos. Algunas propiedades topológicas, que caracteriza

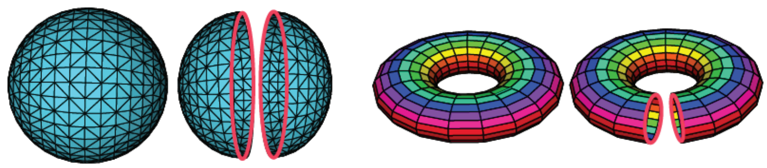


Fig. 9. Derecha esfera y esfera con un corte, izquierda toro y toro con un corte.

la conectividad de un objeto son: el número de componentes conexas, el número de agujeros, el número de cavidades, etc. esto no es más que número de lazos l a diferentes dimenciones d $l_0, l_1 ... l_d$. Cuantificar estas propiedades en los objetos es una de las tareas principales de la topología computacional. Para más detalles [7,8,9].

Otro invariante topológico muy conocido, el cual se deriva de los mencionados arriba, es el famoso número de Euler-Poincare χ, el cual no es más que la suma alternada del número de lazos entre dimensiones continuas $\chi = l_0 - l_1 + ... l_d$.

2. Estrategias para obtener invariantes topológicos

Afirmar que dos objetos (espacios topológicos) son iguales topológicamente, es decir, que sean homeomorfos, es equivalente a encontrar alguna función continua biyectiva entre los dos espacios, lo cual resulta imposible examinar individualmente todas las funciones entre los espacios y encontrar si existe alguna que cumpla las condiciones de homeomorfismo. En vez de esto, se determinan invariantes topológicos, los cuales son propiedades geométricas del espacio (descriptores topológicos), número de Euler-Poincaré, sistemas algebraicos (grupos, anillos, etc.) asociados al espacio. Estos sistemas algebraicos se identifican visualmente en los objetos, como componentes conexas, agujeros, cavidades, etc. Encontrar los grupos algebraicos, sobre los complejos de celdas, se hace una tarea muy difícil por su combinatoriedad, por ello ha tenido mucho auge la reducción de los complejos de celdas, esto consiste en eliminar la mayor cantidad de celdas posibles, sin cambiar la topología del complejo inicial. En esta sección hacemos una descripción de las estrategias para obtener características topológicas de los objetos 3D:
1. Topología algebraica.
2. Reducción de espacio topológico.

2.1. Topología algebraica

La topología algebraica incluye la homología, cohomología, producto cup, etc. siendo uno de los más tratados la homología. Mediante la homología se obtienen los invariantes de n-dimensión de un complejo de celdas, 0-dimensión componentes conexas, 1-dimensión agujeros, 2-dimension cavidades, etc. En la homología sobre complejos de celdas, se maneja el concepto de grupos de r-cadenas $C_r(M)$, operador frontera δ_r, r-ciclos $Z_r(M)$ y r-frontera $B_r(M)$. Si el lector precisa de una mayor profundización puede referirse a [10,11,9,12,13,1,14,15,16]. Apoyándonos en el complejo de celdas de la (Fig. 10) explicamos estos conceptos:

Sea $M = (V,S)$ el complejo de celdas que representa la (Fig. 10) [1].

$$CellComplex(M) = \begin{cases} 0-cell(vertexes), & \{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\} \,, \\ 1-cell(edges), & \{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\,\{4,6\},\{5,6\}, \\ 2-cell(triangles), & \{0,1,2\},\{4,5,6\}. \end{cases} \quad (1)$$

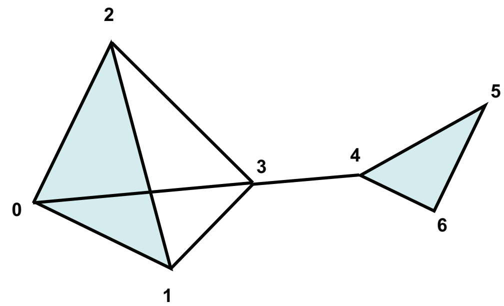


Fig. 10. Complejo de celdas M [1].

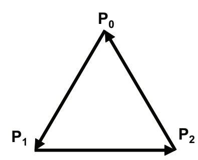
2.1.1. r-cadenas

Las r-cadenas de un complejo de celdas la forman el conjunto de todas las combinaciones de las celdas de igual dimensión. Dado el complejo de celdas M (Fig. 10), ejemplos de cadenas c son:
(a) 1-cadena, $c = (1,3) + (3,4) + (4,5)$
(b) 1-cadena, $c = (0,2) + (3,4) + (5,6)$
(c) 1-cadena, $c = (1,2) + (2,3) - (1,3)$
(d) 1-cadena, $c = (4,5) + (5,6) - (4,6)$
(e) 1-cadena, $c = (0,1) + (1,2) - (0,2)$
(f) 1-cadena, $c = (0,1) + (1,3) - (0,3)$

Los signos dan la orientación.

2.1.2. Operador frontera

El operador frontera δ_r actúa sobre las r-cadenas originando una (r-1)-cadenas. El operador frontera δ_r de una r-cadena es la suma de las fronteras de cada elemento (σ) de la cadena, $\delta_r c_r = \sum \delta\sigma$, donde σ son las celdas que forman la cadena.
La frontera de una celda σ es, $\delta\sigma = \Sigma_{i=0}^{r}(-1)^i(P_0, P_1 ...{}' P_i ... P_r)$, donde el $' P_i$ se omite.
Dado una 2-celda $(P_0P_1P_2)$ (triángulo) tenemos:



$\delta_2(P_0P_1P_2) = (-1)^0(P_1P_2) + (-1)^1(P_0P_2) + (-1)^2(P_0P_1)$
$=(P_1P_2) + (P_0P_1) - (P_0P_2)$

Según el complejo de celdas de la (Fig. 10), algunos ejemplos de 1-cadenas aplicándole el operador frontera son:
(a) $c_1 = (1,3) + (3,4) + (4,5)$
$\delta_1(c_1) = -(1) + (3) - (3) + (4) - (4) + (5) = -(1) + (5)$

(b) $c_2 = (0,2) + (3,4) + (5,6)$
$\delta_1(c_2) = (2) - (0) + (4) - (3) + (6) - (5)$

(c) $c_3 = (1,2) + (2,3) - (1,3)$
$\delta_1(c_3) = 0$

(d) $c_4 = (4,5) + (5,6) - (4,6)$
$\delta_1(c_4) = 0$

2.1.3. r-ciclos

Son las r-cadenas que su operador frontera $\delta_r c_r = 0$, según las 1-cadenas de la sección 2.1.1, ciclos son:
(c) 1-cadena, $c_3 = (1,2) + (2,3) - (1,3)$
(d) 1-cadena, $c_4 = (4,5) + (5,6) - (4,6)$
(e) 1-cadena, $c_5 = (0,1) + (1,2) - (0,2)$
(f) 1-cadena, $c_6 = (0,1) + (1,3) - (0,3)$

El conjunto de los r-ciclos $Z_r(K)$ es un subconjunto de las r-cadenas $C_r(K)$. Si $r = 0$ $\delta_0 c = 0$ y $Z_0(M) = C_0(M)$.

2.1.4. r-frontera

Sea $c \in C_r(M)$, si existe un elemento $d \in C_{r+1}(M)$ tal que $\delta_{(r+1)} d = c$, entonces c es llamado una r-frontera. El conjunto de todos los elementos de $C_r(M)$ que son r-fronteras es denotado por $B_r(M)$.

Según el complejo de celdas de la (Fig. 10) la 1-cadena c=(4,5)+(5,6)-(4,6) es una 1-frontera, porque al aplicar el operador frontera a la 2-cadena $\delta c = (456) = (4,5) + (5,6) - (4,6)$.

2.1.5. Grupos de homología

Sea $Z_r(M)$ y $B_r(M)$ los r-ciclos y las r-fronteras respectivamente, del grupo de cadenas $C_r(M)$, entonces, el r-ésimo grupo de homología $H_r(M)$ del complejo de celdas M es $Z_r(M)/B_r(M)$, este grupo lo forman los ciclos de $Z_r(M)$ que no son frontera. Los n-ciclos que forman estos grupos son homeomorfos, es decir, cada ciclo que forma un grupo puede ser deformado continuamente hasta cualquiera de los otros de su grupo. Algunos de estos grupos pueden ser generados por la multiplicación de otros dos y es a lo que llamamos grupos generadores de homología, siendo finalmente, la cantidad de grupos generadores los agujeros por dimensión, lo cual está asociado a los números de Betti de los grupos de homología.

La implementación del algoritmo clásico para determinar los números de Betti (Smith Normal Form) lo podemos encontrar en [11], otros como (Combinatorial Laplacians) y (Incremental algorithm) son detallados en [17] y [18] respectivamente, explicación generalizada de estos métodos está en [19]. El grupo de investigación ”Topología Computacional y Matemática Aplicada”de la Universidad de Sevilla España, desarrollaron la aplicación ”Voxelo”[1] [2], para el análisis homológico de imágenes 3D médicas de baja resolución (64x64x64). Dos sistemas (aplicaciones) de cálculo algebraico (Kenzo y GAP) son descritos en [20] y un analisis del cálculo topológico computacional en [21].

Una topología más detallada es obtenida usando los grupos de cohomología hallando cociclos y cobordes [11,14,15,16,22].

Obtener los grupos de homología y cohomología de un complejo simplicial, en la práctica, resulta computacionalmete, un proceso altamente costoso, por ello se intenta realizar reducciones del espacio de representación (imagen, complejo de celdas, etc.).

[1] http://alojamientos.us.es/gtocoma
[2] http://www.informatica2007.sld.cu/Members/real/analisis-topologico-de-la-porosidad-de-estructuras-oseas-trabeculares/

2.2. Reducción de espacios

La reducción del espacio de los datos que representan objetos, es cuestión siempre a tratar, debido a las ventajas que facilita en la simplificación de los algoritmos y más, cuando el espacio de representación es extremadamente grande, como es el caso de los complejos simpliciales, que pueden estar formados por miles o millones de celdas.

Las reducciones se aplican a las imágenes (pixeles o voxeles) o sobre el complejo de celdas, en ambos casos el objetivo es eliminar elementos sin afectar su topología. Esta disminución del espacio de elementos, puede estar seguida de las estrategias algebraicas, o dichas reducciones, en si misma, logran características que cumplen con los requisitos de los invariantes topológicos (Esqueletos topológicos, teoría discreta de Morse, etc.).

2.2.1. Colapsado de celdas

El proceso de colapsado, planteado por J. H. C. Whitehead en 1939 logra eliminar celdas de un complejo, sin que se afecte sus características topológicas.

Dos celdas pueden ser eliminadas en un complejo si cumplen la condición:

$$\alpha^p \prec \beta^{p+1}, \tag{2}$$

donde α^p celda solo incidente con β^{p+1}, $\prec$ indica que α^p es de dimensión menor que β^{p+1}.

Si α^p es una arista, entonces β^{p+1} es un triángulo, y para ser eliminados, α^p debe ser solo incidente a β^{p+1}. La (Fig. 11) muestra el proceso de colapsado realizado a un tetraedro, el cual es equivalente topológicamente a una esfera sólida.

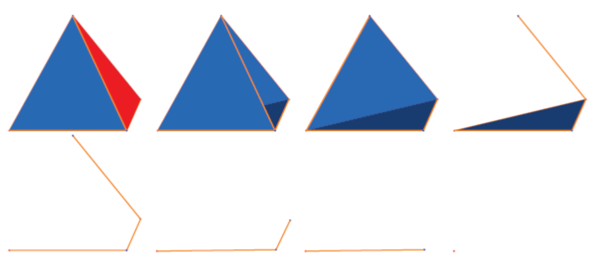


Fig. 11. Colapsado de un tetraedro.

En el ejemplo de la (Fig. 11), el complejo ha quedado reducido a un punto. La (Fig. 12) muestra otro ejemplo de colapsado, donde en este caso, no es posible reducir hasta un punto.

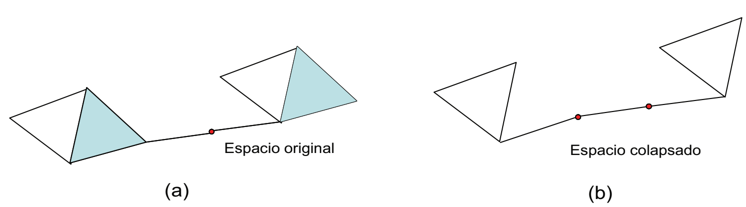


Fig. 12. (a) complejo de celda inicial, (b) complejo colapsado.

Luego de haber realizado la reducción mediante el colapsado, se procede a determinar los invariantes algebraicos (grupos de homología). Técnica semejante se observa en [23], usando el operador integral. El colapsado es imposible de usar en objetos 3D representados mediante su superficie exterior (Fig. 13).

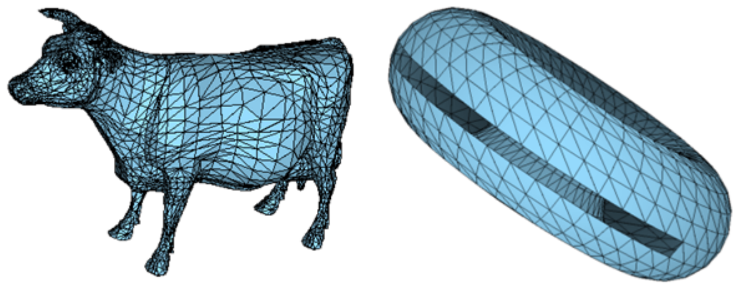


Fig. 13. Cuerpos triangulados por sus límites, en el toro se han eliminado unas celdas, para ver su interior, que está vacío.

2.2.2. Teoría discreta de Morse

Una técnica muy eficiente para lograr reducir complejos de celdas, es a partir de la teoría discreta de Morse [24,5]. R. Forman en [5,25,24] describe técnicas para obtener dicho objetivo, siendo la más usada al establecer un campo de vectores de gradiente discreto sobre el complejo de celdas (topología diferencial [26]), esto no es más que realizar un cotejo (matching) de celdas, es decir, parear dos celdas incidentes, las cuales estarán contenidas en un solo par, este campo de vectores no puede tener ciclos (Fig. 14b). La (Fig. 14a) muestra un ejemplo de una de las celdas pareadas (σ^d *punto* y σ^{d+1}*arista*). Precisemos el

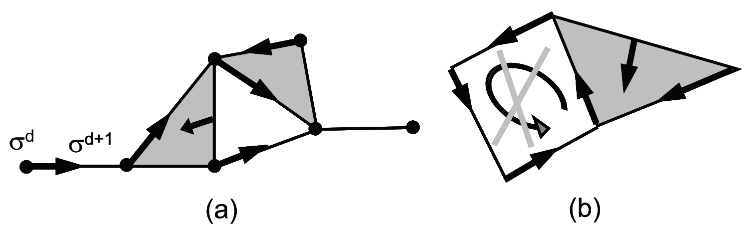


Fig. 14. (a) campo de vectores de gradiente discreto donde parean las celdas de la cola y la cabeza de la flecha y aquellas celdas que no posean ni cabeza ni cola son críticas, (b) no es un campo de vectores de gradiente discreto por poseer un ciclo.

concepto de ciclo en un complejo simplicial y además el de camino de gradiente discreto.

Un ciclo es una secuencia alternada de celdas en la cual la última celda coincide con la primera (Fig. 15a). $\sigma_0^{(p)}, \sigma_0^{(p+1)}, \ldots, \sigma_r^{(p)}, \sigma_r^{(p+1)}, \sigma_{r+1}^{(p)}$ donde, $\sigma_0^{(p)} = \sigma_{r+1}^{(p)}$

El camino de gradiente discreto es una secuencia alternada de celdas donde la primera celda no puede coincidir con la última (Fig. 15b).

$$\sigma_0^{(p)}, \sigma_0^{(p+1)}, \ldots, \sigma_r^{(p)}, \sigma_r^{(p+1)}, \sigma_{r+1}^{(p)} \quad \text{donde, } \sigma_0^{(p)} \neq \sigma_{r+1}^{(p)}$$

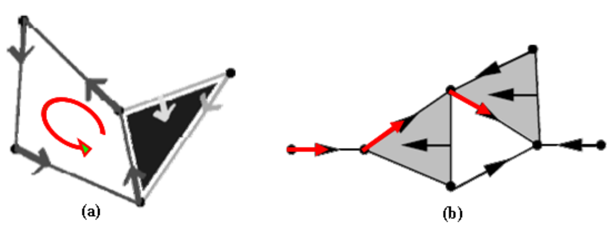


Fig. 15. (a) secuencia de celdas formando un ciclo, (b) camino de gradiente discreto (flechas en rojo).

El resultado más exitoso de esta teoría, es que logrando un cotejo máximo sobre el complejo de celdas, es decir, obtener la menor cantidad de celdas no pareadas, se establece una relación entre la teoría discreta de Morse y la topología algebraica, coincidiendo la cantidad de celdas críticas por dimensión con los números de Betti de los grupos de homología. El campo de vectores logrado bajo esta condición es llamado óptimo. Algunos autores han experimentado estrategias para lograr los campos de vectores óptimos, en [27] usando un grafo construido a partir del complejo de celdas [10] llamado diagrama Hesse y [28] usando un árbol de decisión binario con un criterio de ordenación, para más detalles [29]. Para probar el desempeño se usa la base de datos [30], la cual no ha sido resuelta completamente por estos algoritmos.

Sobre el campo de vectores de gradiente discreto, establecido sobre un complejo de celdas, del cual no se sabe si es óptimo o no, se puede determinar su información topológica algebraica, a través de los caminos de gradiente discreto entre celdas críticas [5]. Esto no es aplicable, debido al alto costo computacional que tendría en la práctica.

En resumen, no existe aún una estrategia usando la teoría discreta de Morse para obtener un campo de vectores de gradiente discreto óptimo.

2.2.3. Esqueletos topológicos

El esqueleto de un objeto, es una reducción de su representación (complejo de celdas, pixels, voxeles), a una estructura esencial, que puede ser reconocida intuitivamente por los humanos (Fig. 16). Los esqueletos suelen dividirse en geométricos o topológicos, por las propiedades de las características extraídas, es decir, en función de la estrategia para construir el esqueleto, estas pueden permitir ciertas deformaciones en el objeto, sin cambiar el resultado. Una muy conocida estructura geométrica es el ”Modelo del eje medio”, siendo este inadecuado para objetos 3D, por tener alto costo computacional y sensible a pequeñas deformaciones en el objeto [3]. En [2] se hace un buen resumen de las técnicas para lograr estructuras esqueléticas.

En esta sección nos detendremos en los esqueletos topológicos y más específico, en los grafos Reeb, por ser los más usados [2].

Fig. 16. Esqueletos.

Grafos Reeb

Como su nombre lo dice, el esqueleto logrado usando la técnica de Reeb [31], es un grafo, donde sus nodos representan niveles de isovalores de una misma componente conexa, de la función establecida sobre el objeto y las aristas, son relaciones de adyacencia entre niveles de isovalores contiguos (Fig. 17).

Las propiedades de las características extraídas del objeto, que brinda el grafo Reeb, está en dependencia de la elección de la función establecida sobre el objeto. Muchos trabajos han usando la función de altura, siendo útil donde se pueda establecer un flujo físico dinámico, por ejemplo, modelado de la superficie terrestre, campo gravitatorio de la tierra, además, en imágenes de tomografía computarizada [3,2], esto se debe a que esta función no es invariante a rotación. Sin embargo, cuando usamos la curvatura como

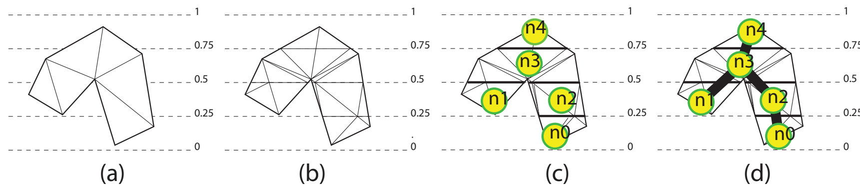


Fig. 17. (a) Complejo de celdas con 4 intervalos, (b) celdas (triángulos) divididos para que todos estén en un solo nivel, (c) nodos representando grupos de triángulos de un mismo nivel y componente conexa, (d) aristas uniendo nodos de niveles vecinos (adyacentes) [2].

función, se eliminan los efectos de la rotación, pero las deformaciones en el objeto, ya sea por ruido o por ser no rígido, construye diferentes grafos Reeb. La distancia geodésica, como función para un grafo Reeb, logra eliminar las situaciones anteriores.

Un buen trabajo donde se ha usado la distancia geodésica, como función del grafo Reeb, para realizar cotejos entre objetos 3D, se observa en [3]. En este trabajo se propone un grafo Reeb multiresolución ”MRG”(en inglés).

La construcción del MRG se realiza sobre el complejo de celdas, el cual queda dividido de la forma más fina inicialmente, luego usando relaciones de adyacencia se obtienen los grafos de niveles más bajos (más gruesos, menos detallados). Las celdas de mayor dimension, quedarán incluidas en solo un intervalo, eliminando esto al subdividir las celdas que están en más de un intervalo, aumentando la cantidad de celdas en el complejo. Los nodos del grafo representan conjuntos de triángulos de un mismo nivel pertenecientes a una misma componente conexa y las aristas unen conjuntos de triángulos de niveles adyacentes (vecinos) (Fig. 18).

En la (Fig. 19)se muestra dos figuras con la distribución de la función de altura y en la (Fig. 20) usando la distribución de la distancia geodésica.

En [3] se muestran los resultados de un experimento de estimación de similaridad para objetos 3D, usando las bases de datos (Viewpoint models [3]), (3DCAFE free stuff [4]) y (Stanford University dataset [5]).

Otros aportes en la dirección de los grafos Reeb aparecen en [2].

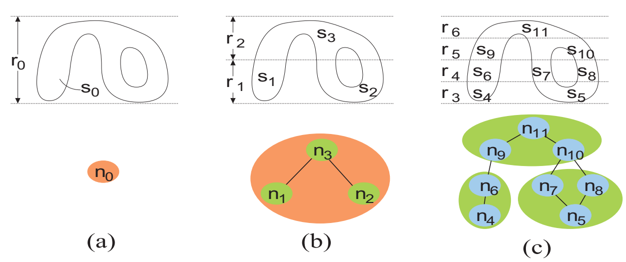


Fig. 18. Grafos multiresolución, construidos usando la función de altura a cuatro niveles diferentes [3].

2.2.4. *Pirámide irregular de grafos*

Esta técnica realiza la reducción del contenido de una imagen etiquetada (binaria) a diferentes niveles, manteniendo su topología, a través de pirámides de grafos [32] construidas usando máscaras de contracción [33,34]. En el último nivel (mayor reducción) se calculan los generadores de los grupos de homología

[3] http://www.viewpoint.com
[4] http://www.3dcafe.com
[5] http://www-graphics.stanford.edu/data/3Dscanrep

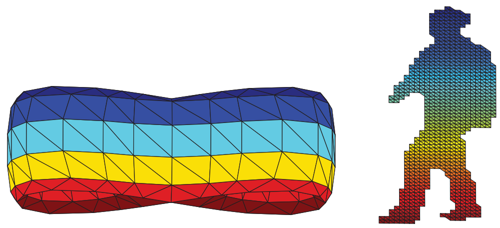


Fig. 19. Objetos representados mediante la distribución de la función de altura.

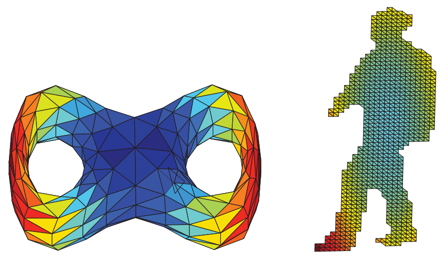


Fig. 20. Distribución de la función basada en la distancia geodésica.

(topología algebraica). Los grupos generadores de la imagen inicial se determina usando las máscaras de contracción a partir de los niveles superiores.

El cálculo de los generadores de los grupos de homología sobre imágenes 2D se describe en [6] y los grupos representativos de cohomología en [35]. Hasta ahora solo se han conseguido aplicar sobre imágenes 2D. Aunque, a este nivel se observa la influencia del costo computacional.

2.3. Caracterización topológica usando deficiencias convexas

Asociando a los objetos su estructura convexa (Fig. 21), es posible obtener información topológica referente a componentes conexas, túneles y cavidades. En [4] se aplica esta estrategia en imágenes 3D representadas mediante voxeles. Usando un poliedro que recubre el objeto, se extraen las deficiencias convexas, resultado de la diferencia entre el objeto y el poliedro recubridor (Fig. 22). Un objeto puede estar formado por varias deficiencias convexas (conjunto de voxeles), dentro de los cuales pueden existir subconjuntos que tienen al menos una cara vecina con el complemento de poliedro recubridor. Cuando la deficiencia convexa tiene dos grupos de voxeles, que al menos tengan una cara vecina con el complemento del poliedro, contamos con un túnel, si existen más de dos grupos entonces el túnel tiene ramificaciones. Si la deficiencia convexa está cubierta completamente por voxeles, pertenecientes al objeto, entonces, existe una cavidad. Si la deficiencia convexa tiene solo un conjunto de voxeles, con al menos una cara vecina al complemento del poliedro, esta representa una concavidad, pero estas no son invariantes topológicos.

Las cavidades y las componentes conexas, usando las deficiencias convexas, no traen problemas en los resultados, no siendo así en los túneles. Los túneles representan 1-ciclos (camino cerrado de voxeles) que no pueden ser reducidos a un punto, las deficiencias convexas no siempre atrapan estos ciclos, ejemplo de esto se observa en el toro, el cual posee dos deficiencias, una donde todos sus voxeles del borde son vecinos del objeto (cavidad) y la otra que posee dos conjuntos de voxeles vecinos con el poliedro recubridor (agujero) y como es sabido, el toro tiene 2 agujeros de dimensión 1.

En esta sección se han expuesto varias estrategias para obtener invariantes topológicos y estas pueden ser agrupadas taxonomicamente. La figura (Fig. 23) muestra una taxonomia de estas estrategias.

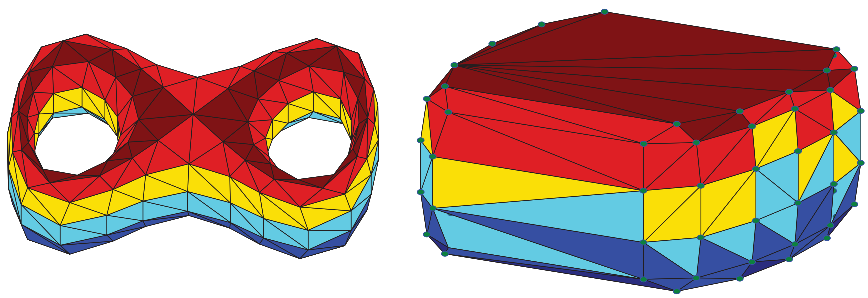


Fig. 21. Toro (izquierda) y su estructura convexa (derecha).

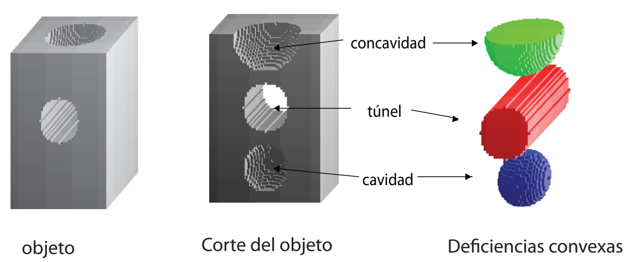


Fig. 22. Objeto y sus deficiencias convexas [4].

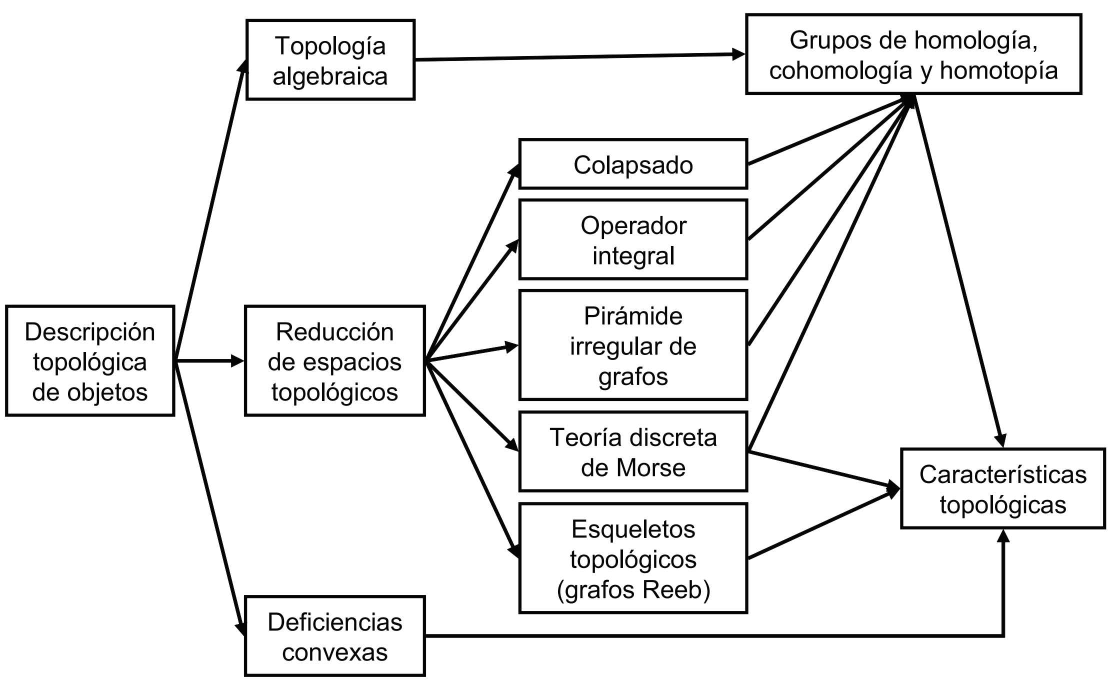


Fig. 23. Taxonomía de los algoritmos, para obtener descriptores topológicos.

3. Bases de datos

Las bases de datos están formadas por objetos que han sido introducidos en las computadoras usando , en su mayoría, escáner 3D o en el caso de las imágenes médicas a través de la tomografía axial computarizada (TAC), resonancia magnética, etc. Estos pueden aparecer con más frecuencia como una distribución de puntos en el espacio, imagen de voxeles, a través de un complejo de celdas, etc. Los repositorios más importantes que se citan para ser usados en los experimentos, relacionados con el cotejo entre dos objetos son: Viewpoint models [6], 3DCAFE free stuff [7], Stanford University dataset [8], AIM@SHAPE SR [9], etc. Esta última presenta una excelente taxonomía de los objetos, orientando al investigador (Fig. 24). El formato más generalizado, para complejos de celdas es (.PLY), el cual puede ser manipulado con la aplicación (Scanalyze) [10] o usando matlab [11].

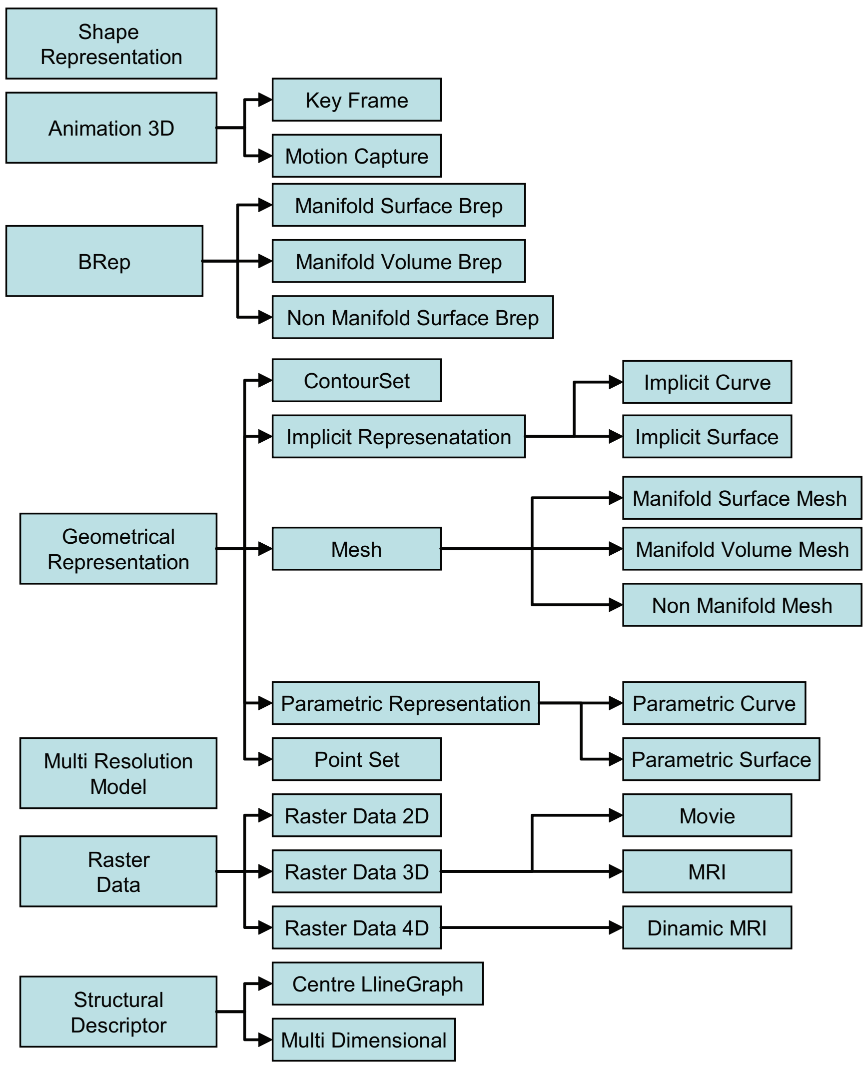


Fig. 24. Taxonomía según repositorio de formas AIM@SHAPE SR.

[6] http://www.viewpoint.com
[7] http://www.3dcafe.com
[8] http://www-graphics.stanford.edu/data/3Dscanrep
[9] http://shapes.aimatshape.net/viewcategory.php
[10] http://www-graphics.stanford.edu/data/3Dscanrep/
[11] http://www.mathworks.com/matlabcentral/files/5459/ply.zip

4. Revistas y eventos que publican el tema

Aquí se muestra una relación de revistas y eventos más importantes, donde se exponen trabajos que usan elementos de la topología, para resolver problemas principalmente, en el área del reconocimiento de patrones y procesamiento de imágenes.

4.1. Revistas

- Advances in Mathematics.
- Algorithmica.
- Topology.
- Topology and Analysis.
- Discrete Mathematics.
- Computational Geometry.
- European Journal of Combinatorics.
- Advances in Applied Mathematics.
- Journal of Combinatorial Theory.
- Journal of Topology its Applications

4.2. Eventos

- ACM SIGGRAPH: Association for Computing Machinery's Special Interest Group on Graphics and Interactive Techniques
- DGCI: International Workshop on Discrete Geometry for Computer Imagery.
- GBRPR: Graph Based Representation for Pattern Recognition.
- CAGD: Computer Aided Geometric Design.
- CIARP: Congreso Iberoamericano de Reconocimiento de Patrones.
- CTIC: Computational Topology in Image Context.
- IWCIA: International Workshop on Combinatorial Image Analysis.
- CAIP: International Conference on Computer Analysis of Images and patterns.

5. Conclusiones

Los complejos de celdas que representan objetos en las computadoras, el cual consta de miles y hasta millones de celdas, ocasionando un problema de complejidad de los algoritmos y alto costo computacional. Estos problemas son enfrentados, en la actualidad, usando la reducción de la cantidad de celadas del objeto, lo cual no da solución completamente. Reducciones como el colapsado, operador integral y pirámides irregulares de grafos, necesitan aplicar una técnica algebraica para obtener finalmente los invariantes topológicos sobre el complejo reducido. La teoría discreta de Morse (cuando asegura un resultado óptimo), logra mediante la reducción los invariantes topológicos. Los grafos Reeb mediante su reducción, también consiguen características topológicas. Usando los grafos Reeb se han conseguido trabajos de cotejo entre conjuntos de objetos, es decir, midiendo el grado de similitud entre ellos, aunque no podemos decir, que sus características respondan completamente a los conceptos de invariantes topológicas, cuando los objetos han sufrido una deformación topológica considerable.

Describir un objeto usando una topología simple, como la homología, no ofrece generalmente, un grado alto de separación entre objetos.

Por ahora, los descriptores topológicos, pueden emplearse en indexación de bases de datos, descartar objetos no deseados, descripsión de objetos, donde el componente topológico sea el interés esencial, como son en las imágenes médicas, etc.

Las estrategias para describir topológicamente un objeto, representado mediante un complejo de celadas finito, tratadas en las publicaciones actuales, solo se extienden hasta el concepto de homología, que define grupos abelianos, simplificando, relativamente, la complejidad al considerar conmutativa las operaciones entre ciclos. Pocos trabajos se introducen en invariantes más finos y complicados como la cohomología, producto cup, etc. por estar muy afectada por la complejidad combinatorial de los algoritmos y de esto un gran costo computacional, aunque mantiene la propiedad de conmutatividad de los grupos de ciclos. Otro invariante aún más estricto, lo encontramos en los grupos de homotopía y estos no son conmutativos.

Referencias Bibliográficas

1. Rubio, J., Sergeraert, F.: Constructive homological algebra and applications. In: Lecture Notes Summer School on Mathematics,Algorithms, and Proofs. University of Genova. (2006)
2. Biasotti, S., Attali, D., Boissonnat, J., Edelsbrunner, H., Elber, G., Mortara, M., Sanniti, G., Spagnuolo, M., Tanase, M., Veltkamp, R.: Skeletal Structures. In: Shape Analysis and Structuring. (2008) 145–183
3. Hilaga, M., Shinagawa, Y., Kohmura, T., Kunii, T.L.: Topology matching for fully automatic similarity estimation of 3D shapes. In: SIGGRAPH01. (2001) 203–212
4. Svensson, Arcelli, di Baja: Characterising 3D objects by shape and topology. In: DGCI: International Workshop on Discrete Geometry for Computer Imagery. (2003)
5. Forman, R.: A user's guide to discrete Morse theory. In: Proc. of the 2001 Internat. Conf. on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, A special volume of Advances in Applied Mathematics. (2001) 48
6. Peltier, S., Ion, A., Haxhimusa, Y., Kropatsch, W.G., Damiand, G.: Computing homology group generators of images using irregular graph pyramids. In: Graph Based Representation for Pattern Recognition. (2007) 283–294
7. Munkres, J.R.: Elements of algebraic topology. Addison-Wesley (1984)
8. Kong T.Y., Roscoe A.W., R.A.: Concepts of digital topology. Topology and its Applications **46** (1992) 219–262
9. Hatcher, A.: Algebraic Topology. Cambridge University Press (2001)
10. Jonsson, J.: Simplicial complexes of graphs. Springer (2008)
11. Mukres, R.: Elements of Agebraic Topology. Addison-Verlag, New York (1997)
12. Lipschutz, S.: General Topology. Temple University (1965)
13. Lundell, A.T., Weingram, S.: The Topology of CW Complexes. Van Nostrand Reinhold Co., New York (1969) The University Series in Higher mathematics.
14. Puebla, E.: Algebra Homológica, cohomología de grupos y K-teoría algebraica clásica. Addison-Wesley Iberoamericana (2005)
15. Sato, H.: Algebraic Topology: An Intuitive Approach. American Mathematical Society (1999)
16. Massey, W.S.: Algebraic Topology: An Introduction. Graduate texts in Mathematics
17. Friedman, J.: Computing betti numbers via combinatiorial laplacians. Algorithmica **21**(4) (1998) 331–346
18. Delfinado, Edelsbrunner: An incremental algorithm for betti numbers of simplicial complexes on the 3-sphere. CAGD: Computer Aided Geometric Design **12** (1995)
19. Dey, T.K., Edelsbrunner, H.: Computational topology (June 15 1999)
20. Romero, A., Ellis, G., Rubio, J.: Interoperating between computer algebra systems: computing homology of groups with `kenzo` and GAP. In May, J.P., ed.: Proceedings of the 2009 international symposium on Symbolic and algebraic computation, KIAS, Seoul, Korea, July 28–31, 2009, pub-ACM:adr, ACM Press (2009) 303–310
21. Zomorodian, A.: Topology for computing. Cambridge University Press, Cambridge (2005)
22. González-Díaz, R., Real, P.: On the cohomology of 3D digital images. Discrete Applied Mathematics **147**(2-3) (2005) 245–263
23. González-Díaz, R., Jiménez, M.J., Medrano, B., Molina-Abril, H., Real, P.: Integral operators for computing homology generators at any dimension. In Ruiz-Shulcloper, J., Kropatsch, W.G., eds.: CIARP. Volume 5197 of Lecture Notes in Computer Science., Springer (2008) 356–363
24. Forman, R.: Witten-morse theory for cell complexes. Topology **37** (1998) 945–976

25. Forman, R.: Morse theory and evasiveness. Combinatorica **20** (2000) 489–504
26. Forman, R.: Combinatorial differential topology and geometry (November 19 0)
27. Lewiner, T., Lopes, H., Tavares, G., Matmídia, L.: Towards optimality in discrete morse theory. Experimental Mathematics **12** (2003) 2003
28. Engström, A.: Discrete morse function from fourier transforms. Experimental Mathematics, Vol. 18 (2009), No. 1 (2009)
29. Lamar-León, J., Gracía-Reyes, E.: Reducción de espacios topológicos ”Teoría discreta de Morse”: Estado de arte. Technical report, CENATAV (2009)
30. Hachimori, M.: Simplicial complex library. Available at `http://infoshako.sk.tsukuba.ac.jp/~hachi/math/library/index_eng.html` (2007)
31. Reeb, G.: Sur les points singuliers dune forme de pfaff comcompletement integrable ou dune fonction numerique [on the singular points of a completely integrable pfaff form or of a numerical function]. Comptes Randus Acad. Sciences Paris **Vol.222** (1946) pp.847–849, 1946
32. Kropatsch, W.G.: Building irregular pyramids by dual-graph contraction. IEE Proceedings-Vision Image and Signal Processing **142**(6) (December 1995) 366–374
33. Jolion, J.M., Rosenfeld, A.: A Pyramid Framework for Early Vision: Multiresolution Computer Vision. Book (1994)
34. Brun, L., Kropatsch, W.G.: Contraction kernels and combinatorial maps. Pattern Recognition Letters **24**(8) (May 2003) 1051–1057
35. Diaz, R.G., Ion, A., Ham, M.I., Kropatsch, W.G.: Irregular graph pyramids and representative cocycles of cohomology generators. In: Graph Based Representation for Pattern Recognition. (2009) 263–272

RT_052, mayo 2013

Aprobado por el Consejo Científico CENATAV

Editor: Lic. Lucía González Bayona

Diseño de Portada: Di. Alejandro Pérez Abraham

RNPS No. 2142

ISSN 2072-6287

Indicaciones para los Autores:

Seguir la plantilla que aparece en www.cenatav.co.cu

C E N A T A V

7ma. A No. 21406 e/214 y 216, Rpto. Siboney, Playa;

La Habana. Cuba. C.P. 12200

Impreso en Cuba