



CENATAV

Centro de Aplicaciones de
Tecnologías de Avanzada
MINISTERIO DE LA INDUSTRIA BÁSICA

RNPS No. 2142
ISSN 2072-6287
Versión Digital

REPORTE TÉCNICO
**Reconocimiento
de Patrones**

SERIE AZUL

**Reducción de espacios topológicos
"Teoría Discreta de Morse":
Estado del arte**

Ing. Javier Lamar León,
Dr. C. Edel García Reyes

RT_025

abril 2010





CENATAV

Centro de Aplicaciones de
Tecnologías de Avanzada
MINISTERIO DE LA INDUSTRIA BÁSICA

RNPS No. 2142
ISSN 2072-6287
Versión Digital

SERIE AZUL

REPORTE TÉCNICO
**Reconocimiento
de Patrones**

**Reducción de espacios topológicos
"Teoría Discreta de Morse":
Estado del arte**

Ing. Javier Lamar León,
Dr. C. Edel García Reyes

RT_025

abril 2010



Índice

1.	Introducción	2
1.1.	Complejos de celdas	5
1.1.1.	Unión de celdas	5
1.1.2.	Colapsado de celdas	5
1.1.3.	Dimensión de un complejo de celdas	6
1.1.4.	Simplicialización y característica de Euler-Poincaré	6
1.1.5.	Desigualdades de Morse	7
1.2.	Teoría discreta Morse	8
2.	Estrategias matemáticas para reducir complejos de celdas usando la teoría discreta de Morse	10
2.1.	Grafo bipartido acíclico de un complejo de celdas (diagrama de Hasse) ...	10
2.2.	Árboles de decisión y teoría discreta de Morse	11
2.3.	Árboles de decisión con criterios de ordenación	12
2.4.	Cancelación de celdas de críticas	14
2.5.	Campo de vectores de gradiente discreto óptimos, obtenidos a fuerza bruta (cotejo máximo acíclico)	16
3.	Bases de datos (complejos simpliciales)	16
4.	Revistas y eventos que publican sobre el tema	16
4.1.	Revistas	16
4.2.	Eventos	17
5.	Grupos de investigación que han tratado el tema	17
6.	Taxonomía de los algoritmos	17
7.	Conclusiones	18
	Referencias bibliográficas	19

Reducción de espacios topológicos “Teoría Discreta de Morse”: Estado del arte

Ing. Javier Lamar León, Dr. C. Edel García Reyes

Centro de Aplicaciones de Tecnología de Avanzada, 7a #21812 e/ 218 y 222, Siboney,
Playa, Ciudad de La Habana, Cuba
jlamar@cenatav.co.cu

RT_025 CENATAV

Fecha del camera-ready: 30 de octubre de 2009

Resumen La teoría discreta de Morse, iniciada por R. Forman en 1995, tiene el objetivo de reducir los espacios topológicos discretos. Esta reducción se logra estableciendo un campo de vectores de gradiente discreto sobre el complejo de celdas, el cual no es único, aunque, logrando encontrar un campo de vectores mínimo, se consigue que la cantidad de celdas críticas por dimension coincida con los invariantes topológicos, es decir, coincide con los números de Betti de los grupos de homología. A partir de la teoría discreta de Morse se obtiene de forma elegante los invariantes topológicos sobre un complejo de celdas, que describe un objeto. La búsqueda del campo de vectores de gradiente discreto óptimo, sobre un complejo de celdas arbitrario, en la actualidad (2009), es un reto para los investigadores de la topología. Este trabajo realiza una revisión de la teoría discreta de Morse, abordando los conceptos básicos, bases de datos (complejos de celdas) usados para probar los algoritmos, estrategias matemáticas para su solución, resultados de las estrategias y concluyendo con los principales problemas que afronta dicha teoría.

Palabras clave: espacio topológico, teoría discreta Morse, complejo de celdas, invariantes topológicos, celdas críticas, campos de vectores de gradiente discreto

Abstract: Discrete Morse theory was developed by R. Forman (1995) as a method to reduce the size of cell complexes. The topological information of a discrete Morse function on a cell complex, considered as a graph or as a binary decision tree, can be encoded as an acyclic matching cells. A discrete matching can be interpreted as a discrete gradient vector field on a cell complex. Unmatched k -dimensional cells (0-cell vertexes, 1-cell edges, 2-cell faces...) are called critical. The topological information will be exact if discrete gradient vector field is optimal, i.e., if it has the minimum possible number of critical cells, equivalent to finding a maximal acyclic matching. The problem of finding optimal discrete gradient vector fields is NP-hard, and the condition that would guarantee an optimal result remains an open problem. In this report a state of the art of the discrete Morse theory is realized.

Keywords: Topological Space, Discrete Morse Theory, Cell Complexes, Topological Invariants, Critical Cells, Discrete Gradient Vector Field

1. Introducción

La topología estudia las propiedades cualitativas de los cuerpos en n -dimensión, o de una forma más general, espacios topológicos. Estas propiedades están agrupadas en el término “invariantes topológicos”, siendo para la topología objetivo principal, determinar aquellos invariantes que logren el resultado acertado de una comparación entre objetos. Los

invariantes más conocidos, por ser más intuitivos al hombre, son la conectividad (componentes conexas), los agujeros y las cavidades. Estas características en los cuerpos (espacios topológicos) no cambian al deformarlos, sin romper ni pegar, por esto, es común leer en la literatura, que la topología estudia las características de los cuerpos que no cambian bajo deformación. De una forma más general se puede decir que: si I es un invariante que asocia a un espacio X un valor distinto al que asocia a un espacio Y , $I(X) \neq I(Y)$, se puede asegurar que X e Y no son espacios equivalentes, pero si el valor del invariante es el mismo para los dos espacios, $I(X) = I(Y)$, no se puede asegurar que se trate de espacios equivalentes [1,2,3].

Como muchas ramas de las matemáticas, la topología encontró su auge al surgir las ventajas de la computación [4], siendo necesario para esto, lograr espacios topológicos de los datos almacenados en las computadoras que representan objetos [5]. Estos datos en la mayoría de los casos, se obtienen a partir de sensores que registran cierta información en porciones homogéneas de la escena, lo cual se puede realizar en 2D o 3D, para obtener un conjunto de píxeles o voxeles respectivamente (Fig. 1); de contar con imágenes en instantes de tiempo (video), tendríamos una tercera o cuarta dimensión, según los casos anteriores. De esta forma inicial de los datos, se han obtenido los espacios topológicos, para desarrollar en un ambiente discreto y finito, los diferentes algoritmos para encontrar los invariantes topológicos.

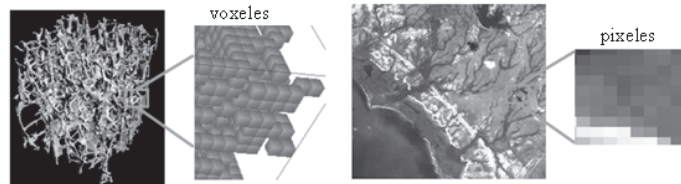


Fig. 1. Imagen 3D (izquierda) y 2D (derecha)

Usando la topología combinatorial, rama de la topología que estudia la partición de objetos en elementos básicos de la geometría (puntos, aristas, superficies, volúmenes... (Fig. 2), se pueden construir los espacios topológicos en las computadoras. A estos elementos se les hace llamar celdas o simplex y a su unión, complejo de celdas o complejo simplicial (Fig. 3).

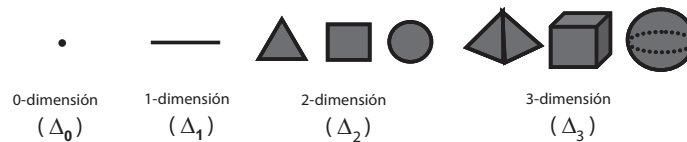


Fig. 2. Elementos de la topología combinatorial (celdas o simplices)

La complejidad del espacio de los datos, siempre ha sido un problema para el desarrollo de los algoritmos, y de mayor importancia, el tiempo de ejecución de estos. Unos de los objetivos de la topología es lograr una representación de los espacios topológicos reducida, la cual mantenga sin cambios los invariantes. Marston Morse en 1925 desarrolla una teoría, que lleva su nombre en la actualidad, para reducción de espacios topológicos. Morse prueba que existe una estrecha relación entre los puntos máximos y mínimos de una función suave

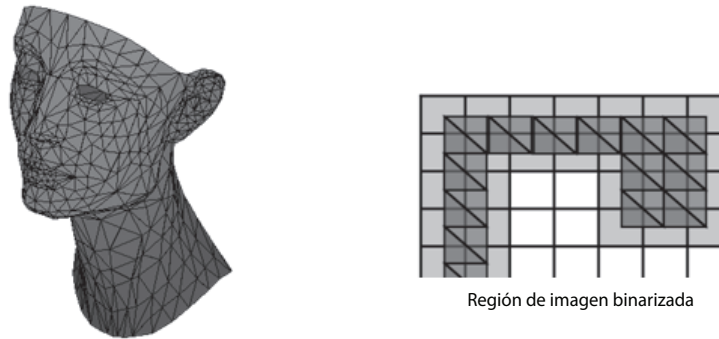


Fig. 3. Complejos de celdas o complejos simpliciales

sobre una variedad compacta, llamados puntos críticos y su topología [6], Estos puntos críticos coinciden con la zona donde se indefine un campo de vectores establecido sobre el cuerpo, siendo un buen ejemplo la función que representa la superficie de la tierra (Fig. 4a), es decir, un campo de vectores coincidente con el flujo superficial de las aguas, en este caso el flujo esta condicionado por una dinámica física propia del espacio analizado, pero la mayoría de los cuerpos no poseen esta propiedad, teniendo lugar la obtención de varios campos de vectores sobre el mismo objeto [7] (Fig. 4b).

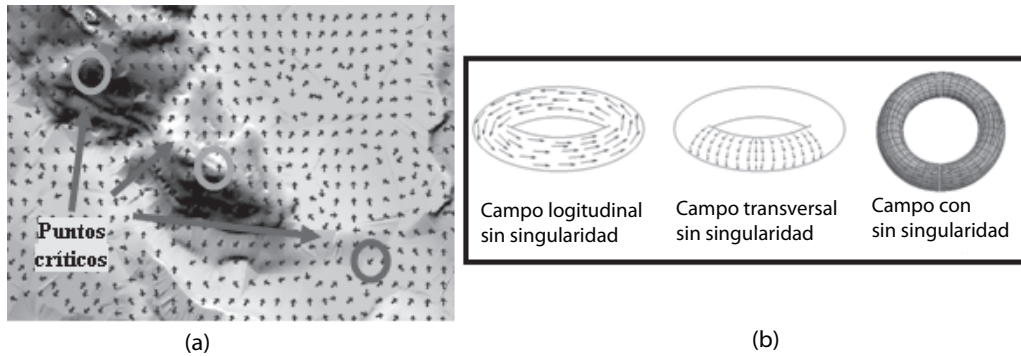


Fig. 4. Campos de Vectores, (a) campo de vectores referente al flujo de las aguas superficiales, los círculos apuntan a las cimas de las elevaciones y a los sumideros, (b) diferentes campos de vectores para un mismo cuerpo (toro)

Un momento de nuevo desarrollo en la teoría de Morse se atribuye a Robin Forman, cuando en 1995 la extiende sobre los complejos de celdas, que pueden ser obtenidos a través de las computadoras, nombrándola, Teoría Discreta de Morse. R. Forman desarrolla una serie de trabajos [8,9], dedicados al avance de la teoría y sus aplicaciones, dando como un problema a solucionar, la obtención de un campo de vectores de gradiente discreto óptimo, es decir, que consiga la menor cantidad de celdas críticas, coincidente con el resultado que se obtiene al determinar los números de Betti de los grupos de homología [10], semejante a lo que sucede con los cuerpos que están dotados de un campo de flujo proveniente de una dinámica física (Fig. 4a). Luego de que R. Forman planteara su teoría y dejara el principal problema abierto, no pocos autores han intentado dar solución a la dificultad de encontrar el campo de vectores óptimo de un complejo de celdas [10,11,12,13,14,14].

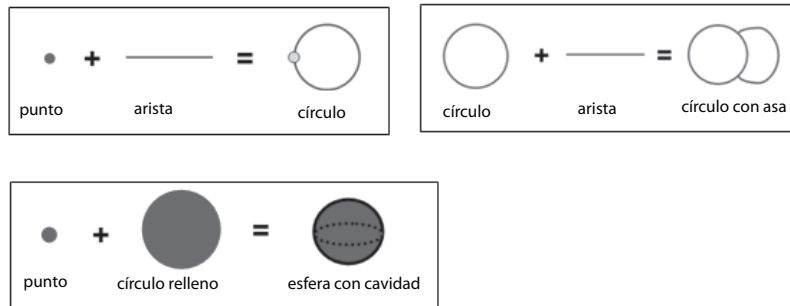
La opinión concluyente de muchos de estos trabajos, es que resulta ser NP-duro, siendo así reflejado muy recientemente (junio 2008) en el artículo [13], donde se asocia la frecuencia de los vértices en el complejo al orden que deben seguir en un árbol de decisión binario, planteado como un problema de búsqueda, esta idea fue inicialmente abordada por R. Forman [8]. La Teoría Discreta de Morse no da solución algún problema antes no resuelto, pero es un lenguaje eficiente y muy conveniente su uso en la práctica [9]. R. Forman termina uno de sus trabajos más recientes y completos, dedicados a su teoría afirmando “Yo creo que la Teoría Discreta de Morse es solo una pequeña parte de lo que algún día será una más completa teoría de Topología Diferencial Combinatorial” [9].

1.1. Complejos de celdas

Parte fundamental de la teoría discreta de Morse lo forman los complejos de celdas (espacios topológicos). Las celdas, como antes se comentó, son elementos básicos de la geometría (Fig. 1) siendo topológicamente equivalentes entre ellas. Para profundizar en el tema consultar [15]. Expondremos algunos conceptos relacionados con los complejos de celdas.

1.1.1. Unión de celdas

El proceso de unir celdas es muy simple, lográndolo al juntarlas por sus límites. Ilustraremos este proceso mediante los ejemplos siguientes:



1.1.2. Colapsado de celdas

El proceso de colapsado, planteado por J. H. C. Whitehead en 1939 logra eliminar celdas de un complejo, sin que se afecte sus características topológicas. Dos celdas pueden ser eliminadas en un complejo si cumplen la condición:

$$\alpha^p \prec \beta^{p+1} \tag{1}$$

Donde α^p celda solo incidente con β^{p+1} , \prec indica que α^p es de dimensión menor que β^{p+1} .

Si α^p es una arista, entonces β^{p+1} puede ser un triángulo, y para ser eliminados, α^p debe ser solo incidente a β^{p+1} . La (Fig. 5) muestra el proceso de colapsado realizado a un tetraedro, el cual es equivalente topológicamente a una esfera sólida.

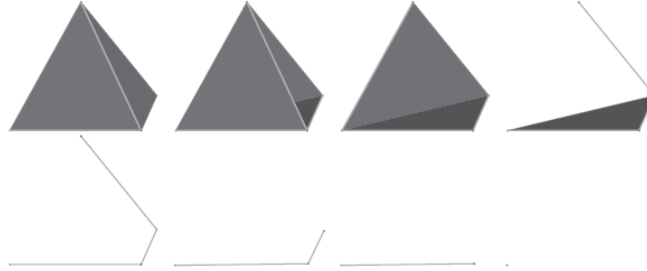


Fig. 5. Colapsado de un tetraedro

En el ejemplo de la (Fig. 5), se percibe que ha quedado reducido a un punto. Este resultado es alcanzado también, aplicando la teoría discreta de Morse, pero sucede, que el colapsado no siempre finaliza con el mínimo de celdas posibles (Fig. 6).

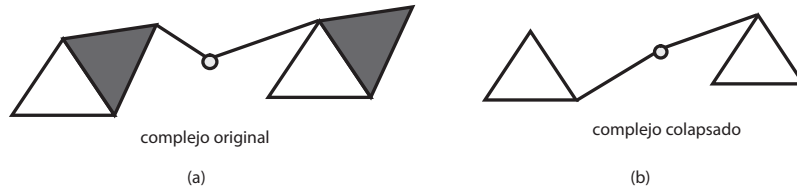


Fig. 6. El complejo de la figura (b) no es posible seguir colapsándolo, aunque, si se puede lograr una mayor reducción, determinando las celdas críticas usando la Teoría Discreta de Morse

Concluimos de este análisis que la teoría discreta de Morse es una generalización del proceso de colapsado.

1.1.3. Dimensión de un complejo de celdas

La dimensión de un complejo se refiere a la celda de mayor dimensión usada para construir un objeto. Si un complejo de celdas proviene de una imagen binarizada, solo contendrá como máximo 2-celdas (triángulos, cuadrados o discos), siendo la más usada el triángulo (Fig. 4b). Sobre un cuerpo sólido se pueden obtener dos complejos, en el caso que se usen celdas solo en sus límites, estas serán 2-celdas (Fig. 7), es el caso de una imagen 3D avoxelada (Fig. 1), donde sus límites coinciden con los voxeles que han quedado después de haber eliminado aquellos que por todas sus caras tengan vecinos, los cuerpos sólidos construidos de esta manera, siempre contendrán cavidades, formadas por esta estrategia de creación del complejo. Si consideramos todo el volumen del cuerpo, se deberá usar celdas.

1.1.4. Simplicialización y característica de Euler-Poincaré

La característica de Euler-Poincaré es un invariante topológico y está dado por:

$$\chi(x) = b_0 - b_1 + b_2 \dots \tag{2}$$

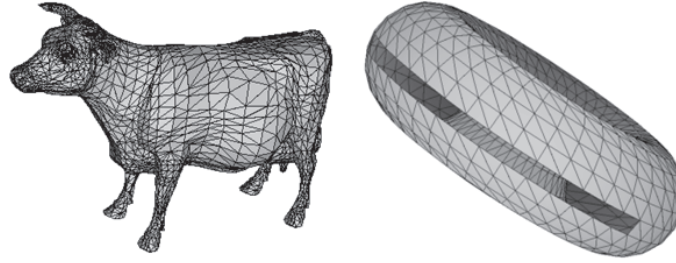


Fig. 7. Cuerpos triangulados por sus límites, posee cavidad en su interior

Donde, b_0, b_1, b_2 números de Betti de los grupos de homología. Estos números de betti coinciden para b_0 con las componentes conexas, b_1 a los agujeros, b_2 a las cavidades de un cuerpo o espacio topológico. El aporte más importante se refiere a la relación existente en la triangulación de un cuerpo y su característica de Euler-Poincaré:

$$\chi(x) = c_0 - c_1 + c_2 \dots \tag{3}$$

Donde, c_0, c_1, c_2 cantidad de celdas por dimensión. Es muy importante tener en cuenta que para un cuerpo sólido, que no es una variedad [16], y se ha triangulado por sus límites, la característica de Euler-Poncaré dará resultados erróneos (Fig. 8), no siendo así cuando al cuerpo se le ha aplicado la topología combinatorial usando como celdas de máxima dimensión las equivalente a la dimensión del cuerpo.

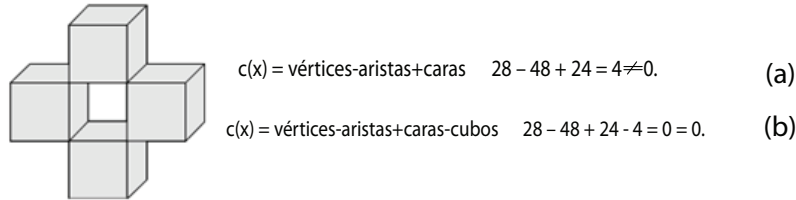


Fig. 8. Este cuerpo es equivalente a un toro sólido, donde $\chi(X) = 0$. En la ecuación (a) el resultado es equivocado, al usar solo hasta las 2-celdas para su simplicialización, no siendo así para el caso (b)

1.1.5. Desigualdades de Morse

Haciendo referencia al teorema 1.7 de [9]:

Teorema 1. (Teorema 1.7 [9]). Sea X un complejo de celdas con c_d celdas por dimensión y b_d los números de Betti de los grupos de homología, $b_d = \dim(H_d(X))$.

(i) Desigualdades débiles de Morse

$$c_d \succeq b_d \tag{4}$$

(ii) Desigualdades fuertes de Morse

$$\begin{aligned} \chi(X) &= b_0 - b_1 + b_2 - \dots \\ \chi(X) &= c_0 - c_1 + c_2 - \dots \end{aligned}$$

$$b_0 - b_1 + b_2 - \dots \preceq c_0 - c_1 + c_2 - \dots = \chi(\Delta) \tag{5}$$

Morse, basado en las ecuaciones 1 y 2 concluye que existe un complejo simplicial con pocas celdas homeotópicamente equivalente al original, siendo el mínimo (óptimo) igual a los números de Betti (ecuación 6), lo siguiente sería una solución óptima equivalente a un cotejo máximo acíclico.

$$b_0 - b_1 + b_2 - \dots = c_0 - c_1 + c_2 - \dots = \chi(\Delta) \tag{6}$$

Donde, $c_0 = b_0, c_1 = b_1, c_2 = b_2$

1.2. Teoría discreta Morse

Según la sección anterior, es posible obtener un complejo de celdas reducido, partiendo de otro mayor, conservando su invarianza topológica. Una técnica muy eficiente para lograr este complejo, es a partir de la Teoría Discreta de Morse [17,9]. R. Forman en [9,8,17] describe técnicas para lograr dicho objetivo, planteándolo de dos formas: definiendo una función discreta de Morse sobre el complejo, que asocia a cada celda un valor, siendo elevado para celdas de dimensión mayor, con a lo sumo una excepción en su vecindad (Fig. 9).

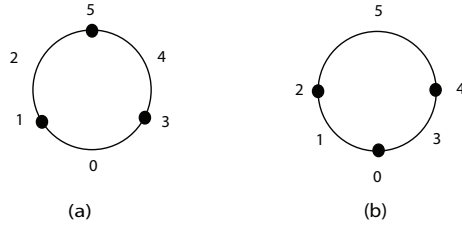


Fig. 9. (a) no es una función discreta de Morse y (b) si lo es [9]

La función discreta de Morse, definida de una forma más precisa [9] es:

$f : X \rightarrow R$, donde X Complejo de celda, satisfaciendo para toda $\sigma \in X$

$$\#\{\sigma \subset \tau \in X \mid \#\tau = \#\sigma + 1, f\{\tau\} \leq f(\sigma)\} \leq 1$$

y

$$\#\{\sigma \supset \tau \in X \mid \#\tau = \#\sigma - 1, f\{\tau\} \leq f(\sigma)\} \leq 1.$$

Definida la función que establece valores enteros sobre cada celda, cumpliendo los requisitos anteriores, podemos encontrar celdas que cumplen:

$$\#\{\sigma \subset \tau \in X \setminus \{\phi\} \mid \#\tau = \#\sigma + 1, f\{\tau\} \leq f(\sigma)\} \leq 0$$

o

$$\#\{\sigma \supset \tau \in X \setminus \{\phi\} \mid \#\tau = \#\sigma - 1, f\{\tau\} \leq f(\sigma)\} \leq 0.$$

Estas celdas son llamadas, celdas críticas, y el conjunto de todas ellas resulta el complejo reducido y homotópico al original. Para el ejemplo de la (Fig. 9b) las celdas 0 (punto) y 5 (arista) resultan ser críticas. Si aplicamos proceso de unir celdas obtenemos nuevamente un círculo (sección 2.1).

Encontrar el conjunto de valores que satisfagan las condiciones para una función discreta resulta muy difícil [9], por lo que no es usada. La segunda técnica se basa en establecer un campo de vectores de gradiente discreto sobre el complejo de celdas, esto no es más que realizar un cotejo (matching) de celdas, es decir, parear dos celdas incidentes, las cuales estarán contenidas en un solo par, este campo de vectores no puede tener ciclos (Fig. 10b). La (Fig. 10a) muestra un ejemplo de una de las celdas pareadas (σ^d punto y σ^{d+1} arista). La (Fig. 11) ilustra el campo de vectores del complejo de la (Fig. 9b).

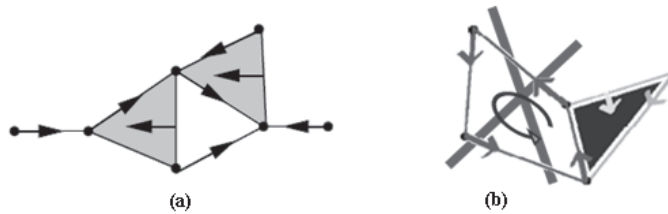


Fig. 10. (a) campo de vectores de gradiente discreto donde parean las celdas de la cola y la cabeza de la flecha y aquellas celdas que no posean ni cabeza ni cola son críticas, (b) no es un campo de vectores de gradiente discreto por poseer un ciclo

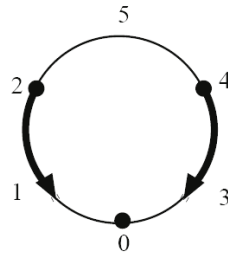


Fig. 11. Campo de vectores de gradiente discreto [9], celda 2(punto) pareado con la celda 1(arista) y la celda 4(punto) con la celda 3(arista), quedando la celda 0(punto) y la celda 5(arista) como celdas críticas

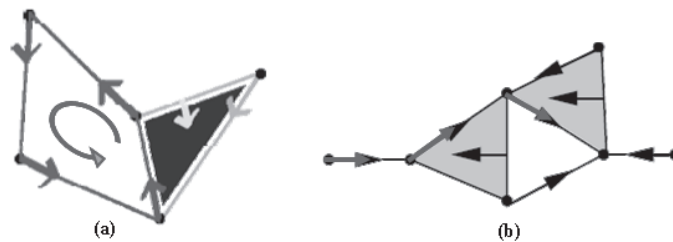


Fig. 12. (a) secuencia de celdas formando un ciclo, (b) camino de gradiente discreto (flechas en rojo)

Precisemos el concepto de ciclo en un complejo simplicial y además el de camino de gradiente discreto. Un ciclo es una secuencia alternada de celdas en la cual la última celda coincide con la primera (Fig. 12a).

$$\sigma_0^{(p)}, \sigma_0^{(p+1)}, \dots, \sigma_r^{(p)}, \sigma_r^{(p+1)}, \sigma_{r+1}^{(p)} \quad \text{donde, } \sigma_0^{(p)} = \sigma_{r+1}^{(p)}$$

El camino de gradiente discreto es una secuencia alternada de celdas donde la primera celda no puede coincidir con la última (Fig. 12b).

$$\sigma_0^{(p)}, \sigma_0^{(p+1)}, \dots, \sigma_r^{(p)}, \sigma_r^{(p+1)}, \sigma_{r+1}^{(p)} \quad \text{donde, } \sigma_0^{(p)} \neq \sigma_{r+1}^{(p)}$$

Para esta técnica, el objetivo a seguir, es lograr un cotejo acíclico en un complejo de celdas, tarea que asociada al trabajo con grafos resulta ser NP-Completo [13,14,18] y si deseamos optimizar el resultado, es decir que la cantidad de celdas críticas sea la mínima, igual a los números de Betti, la solución sería aun más difícil, logrando para esto un cotejo acíclico máximo.

2. Estrategias matemáticas para reducir complejos de celdas usando la teoría discreta de Morse

2.1. Grafo bipartido acíclico de un complejo de celdas (diagrama de Hasse)

Si para lograr un campo de vectores de gradiente discreto, necesitamos cotejar celdas en ausencia de ciclos, convendría asociar el complejo de celdas a un grafo, el cual quedaría de la siguiente manera Fig. 13) [9]:

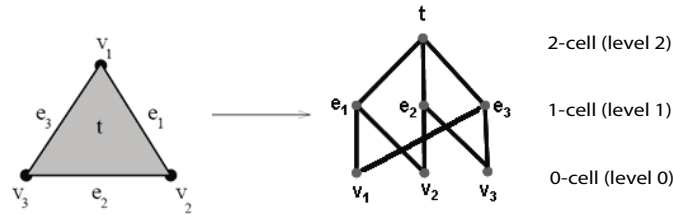


Fig. 13. (a) Complejo de celdas correspondiente a una 2-celda, (b) grafo bipartido descendente por la dimensión de las celdas, los nodos representan las celdas y las aristas la incidencia entre ellas

Dotar a este grafo de una orientación, la cual no contenga ciclos, es lograr un campo de vectores de gradiente discreto llamado diagrama de Hasse (Fig. 14).

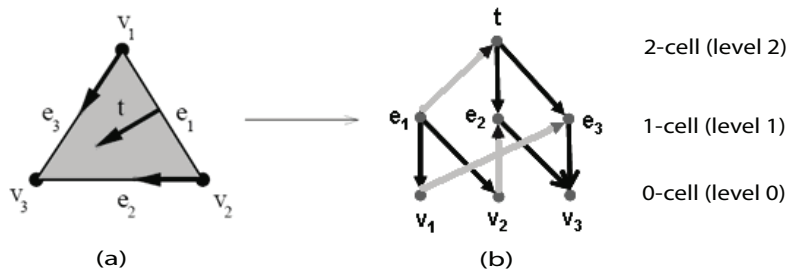


Fig. 14. (a) Campo de vectores de gradiente discreto sobre una 2-celda; (b) diagrama de Hesse, las celdas en los extremos de las flechas azules son las celdas pareadas.; la única celda no pareada es el vértice v_3), resultando ser una celda crítica. Hablando en términos de grafos acíclicos dirigidos, serían los nodos sumideros y los sifones las celdas críticas, v_3 es un sumidero

La orientación de estos grafos bipartidos se realiza por capas, por ejemplo, podría empezarse por la capa de las 0-celdas (puntos) con las 1-celdas (aristas) y realizar el pareo. Las celdas que han quedado sin parear de la capa 1-celda se proceden a parear con la capa de las 2-celda (triángulos para la Fig. 13b), a esto es llamado capa de celdas reducida [11,12,18] y así seguidamente hasta la última dimensión. En la explicación anterior, hemos tomado como inicio para el pareo de celdas, las capas 0/1, es decir, 0-celdas/1-celdas, pero bien podría haber sido, cualquiera otra combinación de dos capas continuas (0/1, 1/2, 3/2...n-1/n ó...n-1/n, 3/2, 2/1, 1/0,...etc.). De aquí se desprende una heurística para la selección en el orden de procesado de las capas y además en las celdas a parear en cada capa [18]. Este hecho trae problemas en los resultados, es decir, diferentes heurísticas, hacen que se obtengan cambios relacionados con la optimización de los complejos de celdas estándares [11,18], destacando que ninguna de ellas, logra un resultado generalizador para un complejo de celdas arbitrario.

2.2. Árboles de decisión y teoría discreta de Morse

R. Forman en [9] asocia un árbol de decisión binario a un complejo simplicial como una aplicación al problema de búsqueda. Un árbol de decisión de un complejo simplicial X con un conjunto de vértices V , determina si un subconjunto de V está en X , realizando preguntas como ¿Está v_i en σ ?. En mucho de los casos no es necesario realizar $\#V$ preguntas para cumplir el objetivo. El interés es construir un árbol general que realice la menor cantidad de preguntas, y con esto, obtienen un complejo simplicial reducido. Aquellos complejos simpliciales en los cuales para un árbol de decisión A y para cualquiera de los subcomplejos, no sea necesario hacer $\#V$ preguntas, con excepción del vértice que siempre quedará pareado al conjunto vacío (vértice 3, Fig. 9) son no-evasivos, y a su vez colapsables y por tanto contraíbles [8], quiere decir esto, que pueden ser reducidos a un punto. En el caso contrario existirán celdas llamadas evasoras que no podrán determinarse con menos de $\#V$ preguntas; la cantidad de evasoras guardan una relación con la homología $H(X)$ del complejo de celdas; según el teorema de las desigualdades de Morse, analizado anteriormente. Tenemos que:

Para un complejo de celdas “ X ” y algún árbol de decisión “ A ”.

$$\#evasoras \geq \dim H(X)$$

Esta desigualdad es apropiada para un gran conjunto de árboles de decisión, proporcional a la combinación en el orden de los vértices que adoptemos en el árbol), que arriban a diferentes cantidades de celdas evasoras, siendo equivalente a diferentes campos de vectores de gradiente discreto, los cuales podrán ser óptimos o no.

En la (Fig. 15) se muestra un ejemplo sencillo de un árbol binario, construido a partir de un complejo simplicial proveniente de una 2-celda (triángulo). Este conjunto de celdas tiene la peculiaridad que todo posible subconjunto es una celdas perteneciente al conjunto simplicial y es lo que permite ante la respuesta de un *si*, a la pregunta de ¿Está v_i en σ ? estar seguro que se encuentra en el complejo, y en esa rama del árbol no habrá evasoras (celdas críticas).

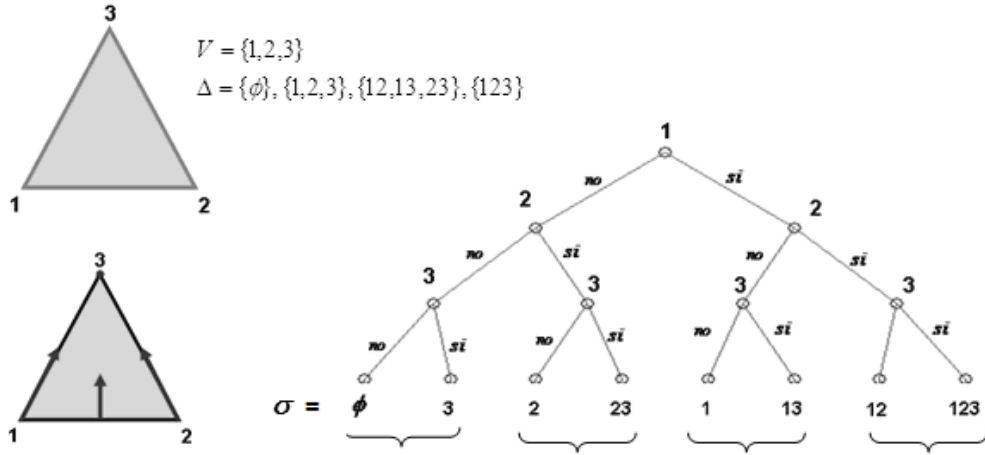


Fig. 15. Árbol de decisión para una 2-celda, las llaves encierran las celdas pareadas en el campo de vectores de gradiente discreto, el vértice 3 a pareado con el conjunto nulo ϕ y esto lo hace una celda crítica

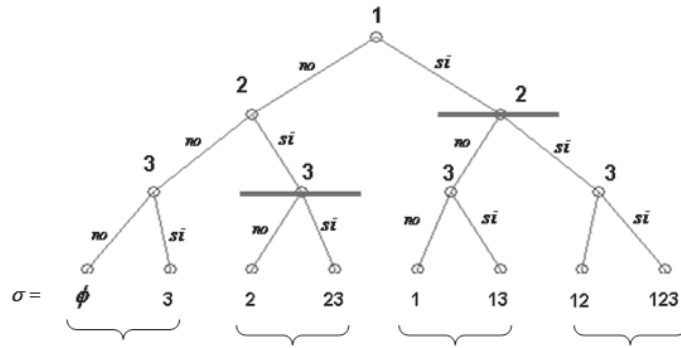


Fig. 16. Las líneas en gris señalan el nodo del árbol o el número de la pregunta para la cual se concluye si σ pertenece o no al complejo, ambas líneas se ubican en un número menor a la cantidad de vértices del complejo, por lo que en esas ramas no hay celdas críticas

La (Fig. 16) muestra en que posición del árbol se concluye afirmando si σ pertenece o no al complejo de celdas.

2.3. Árboles de decisión con criterios de ordenación

La cantidad de árboles de decisión que se forman para un complejo de celdas es muy grande, debido a que depende de las permutaciones que ocurren en un conjunto de vértices; solo para 7 puntos se forman 5040, esto hace necesario encontrar algún criterio a tomar en cuenta para ordenar las preguntas (vértices) en el árbol, este detalle fue tomado en cuenta en el trabajo [13].

A partir de la probabilidad de realizar la pregunta ¿Está v_i en σ ?, es decir, en función de la frecuencia de ocurrencia de los vértices en el complejo simplicial se ha establecido un orden para el árbol. En esta dirección el autor del trabajo [16] probaron que:

$$K_X \leq \sum_{v \in V} \delta(T; v) \hat{X}\{v\} \quad K_X = 2^{2-2n}(2^n - \#X)\#X \quad (7)$$

donde:

$\delta(T; v)$ probabilidad de la pregunta ¿Está v_i en σ ?

$\hat{X}\{v\} = 2^{1-n}(\#\Delta - 2\#lk_\Delta(v))$, transformada de Fourier.

$\#X$, cantidad de celdas en el complejo simplicial.

n , cantidad de vértices.

La ecuación (7) refleja que se necesita minimizar $\delta(T, v)$, en busca de lograr menos evasores y a su vez menos celdas críticas, cumpliéndose esto para aquellos vértice que maximicen su transformada de Fourier, por tanto, en el árbol de decisión preguntaremos primero por los vértice que tengan su transformada elevada.

Daremos algunos conceptos muy simples y seguidamente expondremos un ejemplo muy sencillo, capaz de ser reproducido a mano. La eliminación de un vértice en un complejo simplicial X denotado por $dl_{(X)}(v)$ es:

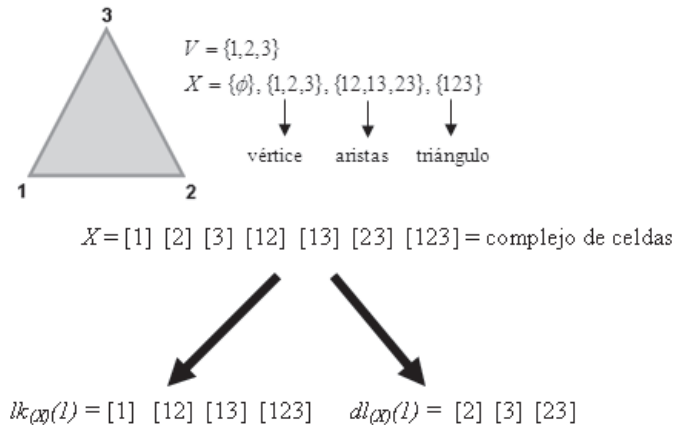
$$dl_{(X)}(v) = \{\sigma \in X \mid v \notin \sigma\}$$

y las celdas incidentes relacionada con el conjunto $dl_{(X)}(v)$ denotado por $lk_{(X)}(v)$ es:

$$lk_{(X)}(v) = \{\sigma \in dl_{(X)}(v) \mid \sigma \cup \{v\} \in X\}$$

La unión del conjunto de celdas $dl_{(X)}(v)$ y $lk_{(X)}(v)$ forman el complejo simplicial X . Ilustraremos esto a través del ejemplo 1, usando un complejo de celdas formado por la 2-celda (triángulo). En tiempo de programación no es necesario considerar el conjunto vacío ϕ .

Ejemplo 1: Como es fácil ver, $\#dl_{(X)}(v) + \#lk_{(X)}(v) = \#X = 7$. Ahora podemos



mencionar una relación muy importante entre la transformada de Fourier para un vértice en el conjunto simplicial y el $\#lk_{(X)}(v)$ [13].

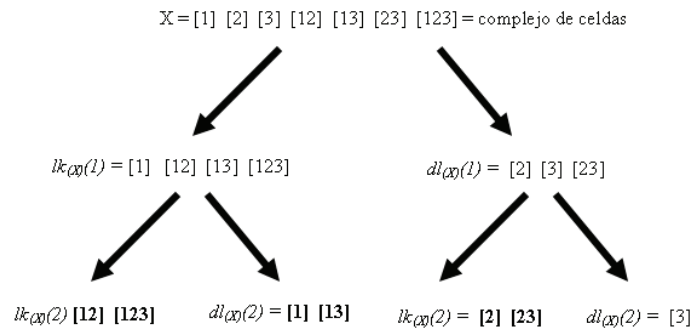
Resulta que el vértice con la transformada de Fourier elevada formará un conjunto mínimo de $lk_{(X)}(v)$ y esto es útil para obtener la organización del árbol de decisión. En el ejemplo 1 hemos tomado un vértice al azar para mostrar como se obtiene $dl_{(X)}(v)$ y $lk_{(X)}(v)$,

pero lo que debemos hacer, primeramente, es encontrar el vértice con mayor valor en su transformada de Fourier, que es equivalente al vértice que tenga la menor frecuencia de ocurrencia en las celdas del complejo, y por tanto, forma un conjunto mínimo de $lk_{(X)}(v)$.

Para el complejo de una 2-celda, como el del ejemplo 1, todos los vértices tienen la misma frecuencia, por tanto podemos seguir desarrollando el ejemplo 1.

Lo que debemos hacer es repetir el mismo proceso a cada conjunto $dl_{(X)}(v)$ y $lk_{(X)}(v)$, que se va formando, hasta obtener conjuntos con un número de celdas menor o igual a 2. Los conjuntos de 2 celdas forman los pares y las que han quedado sola son las críticas (ejemplo 1.1).

Ejemplo 1.1: Finalmente han quedado los conjuntos menores o iguales a 2, formando



los pares: $[12][123]$, $[1][13]$ y $[2][23]$ y la celda o vértice $[3]$ a quedado sola, por lo que resulta una celda crítica. Con esto es fácil construir el campo de vectores de gradiente discreto que se muestra en la (Fig. 17).

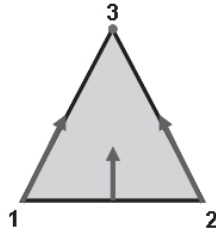


Fig. 17. Campo de vectores de gradiente discreto, el punto rojo es la celda crítica (vértice)

Esta idea también fue aplicada a los complejos de celdas de la librería Hachimori en [13] y los resultados no fueron alentadores, solo un 42% lograron la optimización.

2.4. Cancelación de celdas de críticas

En busca de lograr la mínima cantidad de celdas críticas, R. Forman extiende el “Teorema de Cancelación” de J. Milnor, definido para funciones suaves para la teoría de Morse, a su teoría discreta de Morse.

Después de obtener un campo de vectores de gradiente discreto, que bien puede ser usando el diagrama de Hesse o los árboles de decisión y considerando ser no óptimo, es decir, que pueden ser eliminadas más celdas, se procede a la cancelación de celdas críticas.

Dos celdas críticas pueden ser eliminadas cuando existe un único camino de gradiente discreto que las une, desde su o sus fronteras, esto es posible porque al invertir el sentido de las flechas, ambas celdas críticas quedan paradas con sus celdas vecinas, (Fig. 18a). En la (Fig. 18b) se muestra un ejemplo de dos celdas críticas unidas por más de un camino y el resultado de invertir la orientación del gradiente.

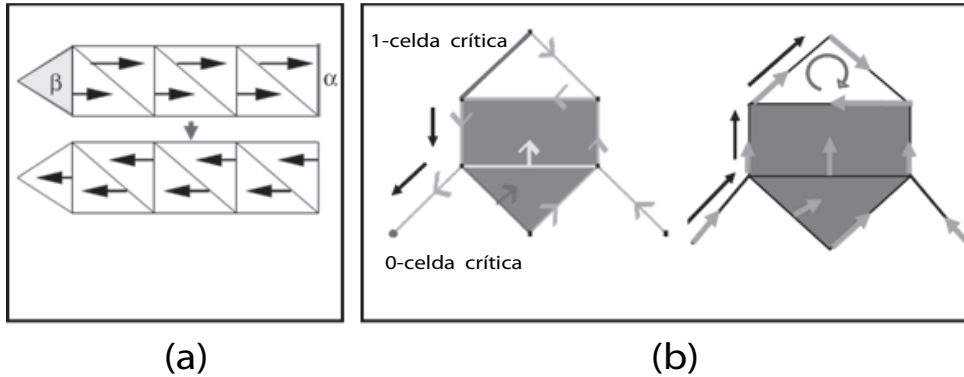


Fig. 18. (a) Cancelación de las celdas β (2-celdas) y α (1-celda) al invertir la orientación de la flechas, (b) ciclo creado al invertir la orientación entre la 0-celda y 1-celdas críticas en rojo, lo cual no responde a las exigencias de un campo de vectores de gradiente discreto

R. Forman no comenta de la complejidad de solución de estas tareas y tampoco queda demostrado si el campo de vectores obtenido finalmente es el óptimo, es decir, si después de aplicar dicho teorema, el complejo de celda no ha arribado a su mínimo de celdas u optimización. Esto último es cierto y queda demostrado al usar el complejo simplicial llamado “Non-extendably” de la biblioteca Hachinori [19], (Fig. 19) muestra el campo de vectores de gradiente discreto no óptimo, hallado usando el algoritmo de [13], el cual recomienda llegar a la optimización usando el teorema de cancelación, pero para este complejo no es posible.

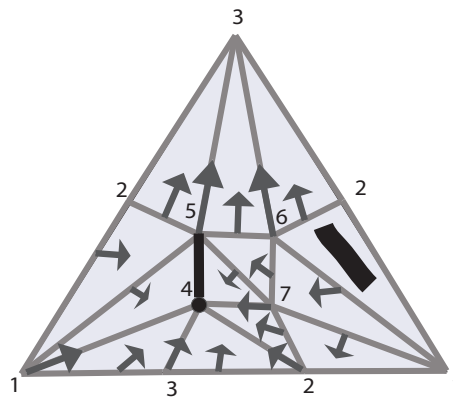


Fig. 19. Campo de vectores de gradiente discreto con 3 celdas críticas en negro, 0-celda (punto), 1-celda (arista) y 2-celda (triángulo), Este complejo de celdas “Non-extendably” posee un mínimo de celdas críticas de una 0-celda crítica (1,0,0) [18] y no puede ser reducido para el campo de vectores de gradiente discreto obtenido, aplicando el teorema de cancelación, debido a que aparecen ciclos

Algunos autores han tomado esta idea y es el caso de [10], donde R. Forman comenta en su trabajo [9] que es una buena aplicación para determinar la homotopía de algunos tipos de complejos simpliciales y el estudio de sus particiones.

2.5. Campo de vectores de gradiente discreto óptimos, obtenidos a fuerza bruta (cotejo máximo acíclico)

Todo complejo simplicial asociado a un objeto, guarda una relación entre sus celdas críticas y sus invariantes, lo cual ya ha sido explicado en la sección (1.1.5), esto hace afirmar que sobre todo complejo simplicial puede construirse un campo de vectores de gradiente discreto óptimo, es decir, si emplazamos una computadora para que construya todos los posibles árboles binarios de búsqueda (sección 2.2) para dicho complejo de celdas, en algún momento obtendremos el óptimo. Los resultados alcanzados sobre la librería Hachimori a fuerza bruta se observan en [14]; es de destacar que la computadora, después de una semana de trabajo no logró alcanzar el óptimo sobre algunos de estos complejos de celdas. En estos casos es conocido el resultado esperado y la computadora se detiene ante este, pero, cuando el complejo de celdas sea arbitrario, es decir, no se conoce sus invariantes, no sabremos cuando parar, solo guardar el mínimo durante un tiempo definido de trabajo para la computadora, sin saber con seguridad, si corresponde al óptimo.

3. Bases de datos (complejos simpliciales)

Estos datos consisten en una variedad de complejos simpliciales, que permitan validar los algoritmos para obtener un campo de vectores de gradiente discreto. Estos complejos se obtienen de descomponer un objeto en piezas llamadas celdas (Fig. 2).

Con el objetivo de lograr un conjunto diverso de complejos de celdas, el autor de [19] ha construido y reunido complejos de celdas, los cuales son usados en la mayoría de los trabajos que tratan este tema [11,12,13,14], haciéndola una librería estándar.

Una de las formas de representación (discreta) de objetos en las computadoras, es precisamente usando las celdas de la (Fig. 2), por lo que es común encontrar software que contienen figuras almacenadas con un formato que contiene la relación de incidencia de sus celdas y otros datos de interés, dando la posibilidad de ser extraídos y poderse usar en aumentar la validación de los resultados, un caso de estos es visto en [20].

4. Revistas y eventos que publican sobre el tema

4.1. Revistas

- Advances in Mathematics.
- Topology.
- Discrete Mathematics.
- Electronic Notes in Discrete Mathematics.
- Computational Geometry.

- European Journal of Combinatorics.
- Comptes Rendus Mathematique.
- Advances in Applied Mathematics.
- IEEE Trans. Vis. Comput. Graph.
- IEEE Computer Graphics and Applications.
- Transactions of the American Mathematical Society.
- The International Journal of Robotics Research.
- Journal of Combinatorial Theory.

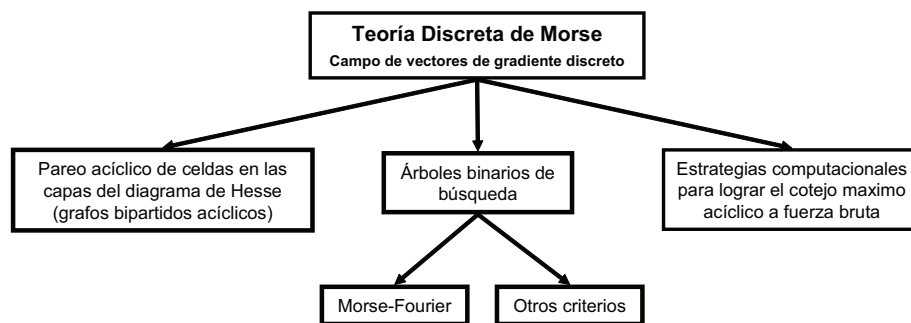
4.2. Eventos

- Seminaire Lotharingien de Combinatoire.
- Workshop on Combinatorial and Computational Aspects of Optimization, Topology and Algebra.
- Combinatorica, 2000.
- Proceedings of the American Mathematical Society, 2006
- Experimental Mathematics, 2003.
- Comput. Geom., 2003.
- Geometriae Dedicata, 2008 - Springer
- Biometrika, 2007.
- Proceedings of the 2007 ACM symposium on Solid and physical.

5. Grupos de investigación que han tratado el tema

- Department of Mathematics Royal Institute of Technology S-100 44 Stockholm Sweden.
- Dept. of Mathematics, Louisiana State University, Baton, Rouge, LA 70803-4918, U.S.A.
- Department of Mathematics, MA 7-1 Technology University of Berlin, Germany.
- Dept. of Mathematics Rice University P. O. Box 1892 Houston, TX 77251.
- Departamento de Matematica, Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

6. Taxonomía de los algoritmos



Estos algoritmos intentan encontrar el campo de vectores de gradiente discreto óptimo, pero ninguno de ellos logra el objetivo, al ser evaluados sobre los complejos simpliciales de la librería Hachimori [19]. La diferencia entre los algoritmos radica en la cantidad de celdas críticas, el número y variedad de complejos de celdas que alcanzan el óptimo.

Al campo de vectores de gradiente discreto resultante de aplicar uno de estos algoritmos sobre un complejo de celdas arbitrario, se le puede realizar una cancelación de celdas críticas, aunque tampoco es una estrategia generalizadora, según es explicado en la sección (2.4), esta idea es aplicada en [13].

7. Conclusiones

El algoritmo o criterio que proporcione una solución óptima (número mínimo de celdas críticas por dimensión), coincidiendo esto con los invariantes topológicos o números de betti, para un complejo simplicial arbitrario, es decir, independientemente de sus características, aún no se ha planteado. Lograr un campo de vectores de gradiente discreto óptimo, sigue siendo un problema NP-Completo. Aunque, todavía se pueden explorar nuevos criterios en la construcción de los árboles de búsquedas, para un complejo de celdas.

Referencias bibliográficas

1. Hatcher, A.: Algebraic Topology. Cambridge University Press (2001)
2. Mukres, R.: Elements of Algebraic Topology. Addison-Verlag, New York (1997)
3. Lipschutz, S.: General Topology. Temple University (1965)
4. Dey, T.K., Edelsbrunner, H.: Computational topology (June 15 1999)
5. Desbarats, P., Gueorguieva, S.: CW complexes: Topological mainframe for numerical representations of objects. In Kumar, V., Gavrilova, M.L., Tan, C.J.K., L'Ecuyer, P., eds.: ICCSA (3). Volume 2669 of Lecture Notes in Computer Science., Springer (2003) 498–507
6. Milnor, J.: Morse Theory. Volume 51 of Annals of mathematics studies. Princeton University Press, Princeton (1963)
7. Chari, M.K., Joswig, M.: Discrete morse complexes (November 28 2000) Comment: 12 pages, 3 figures.
8. Forman, R.: Morse theory and evasiveness. *Combinatorica* **20** (2000) 489–504
9. Forman, R.: A user's guide to discrete morse theory. In: Proc. of the 2001 Internat. Conf. on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, A special volume of Advances in Applied Mathematics. (2001) 48
10. Babson, E., Hersh, P.: Discrete morse functions from lexicographic orders. *Trans. Amer. Math. Soc* **357** 2005
11. Lewiner, T., Lewiner, T.: Constructing discrete morse functions (2002)
12. Lewiner, T., Lopes, H., Tavares, G.: Optimal discrete morse functions for 2-manifolds. *Computational Geometry: Theory and Applications* **26** (2003) 2003
13. Engstrom, A.: Discrete morse function from fourier transforms. *Experimental Mathematics*, Vol. 18 (2009), No. 1 (2009)
14. Joswig, Pfetsch: Computing optimal morse matchings. *SIJDM: SIAM Journal on Discrete Mathematics* **20** (2006)
15. Lundell, A.T., Weingram, S.: The Topology of CW Complexes. Van Nostrand Reinhold Co., New York (1969) The University Series in Higher mathematics.
16. O'Donnell, Saks, Schramm: Every decision tree has an influential variable. In: FOCS: IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). (2005)
17. Forman, R.: Witten-morse theory for cell complexes. *Topology* **37** 945, 1998

18. Lewiner, T., Lopes, H., Tavares, G., Matmídia, L.: Towards optimality in discrete morse theory. *Experimental Mathematics* **12** 2003
19. Hachimori, M.: Simplicial complex library. <http://infoshako.sk.tsukuba.ac.jp/hachi/math/library/indexeng.html> (2007)
20. Polthier, K.: Software javaview. (<http://www.javaview.de/>)

RT_025, abril 2010

Aprobado por el Consejo Científico CENATAV

Derechos Reservados © CENATAV 2010

Editor: Lic. Lucía González Bayona

Diseño de Portada: DCG Matilde Galindo Sánchez

RNPS No. 2142

ISSN 2072-6287

Indicaciones para los Autores:

Seguir la plantilla que aparece en www.cenatav.co.cu

C E N A T A V

7ma. No. 21812 e/218 y 222, Rpto. Siboney, Playa;

Ciudad de La Habana. Cuba. C.P. 12200

Impreso en Cuba

